Brevet 1980 - Amiens

Algèbre

1. $f(x) = 3(x-2)^2 - (x-2)(x+1) - x + 2 = 3\left(x^2 - 4x + 4\right) - \left(x^2 + x - 2x - 2\right) - x + 2$
$= 3x^2 - x^2 - 12x + x - x + 12 + 2 + 2 = 2x^2 - 12x + 16$

$\boxed{f(x) = 2x^2 - 12x + 16}$

$g(x) = (x+2)^2 - 4(x-1)^2 = x^2 + 4x + 4 - 4\left(x^2 - 2x + 1\right)$
$= x^2 - 4x^2 + 4x + 8x + 4 - 4 = -3x^2 + 12x$

$\boxed{g(x) = -3x^2 + 12x}$

2. Pour factoriser f, on remarque que $x - 2$ apparaît dans les 3 « groupes » de termes :
$f(x) = 3(x-2)^2 - (x-2)(x+1) - x + 2 = (x-2)\left(3(x-2) - x - 1 - 1\right)$
$= (x-2)(2x-8) = 2(x-2)(x-4)$

$\boxed{f(x) = 2(x-2)(x-4)}$

Pour g, on reconnaît une forme $a^2 - b^2$:
$g(x) = (x+2)^2 - 4(x-1)^2 = \left(x + 2 + 2(x-1)\right)\left(x + 2 - 2(x-1)\right)$
$= (x + 2x + 2 - 2)(x - 2x + 2 + 2) = 3x(4-x)$

$\boxed{g(x) = 3x(4-x)}$

<u>Remarque :</u> comme d'habitude, on vérifie que les résultats des 2 questions sont cohérents !

3. $g\left(-\frac{2}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)\left(4 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = -2 \times \frac{14}{3}$

$\boxed{g\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{28}{3}}$

$g\left(\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(4 - \sqrt{2}\right) = 12\sqrt{2} - 3\left(\sqrt{2}\right)^2 = 12\sqrt{2} - 6$

$\boxed{g\left(\sqrt{2}\right) = 6\left(2\sqrt{2} - 1\right)}$

4. Pour les 2 premières équations, nous allons utiliser les formes factorisées on se souvenant qu'un produit est nul si l'un de ses facteurs est nul.
On peut donc écrire :
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$\boxed{\text{Donc les solutions de } f(x) = 0 \text{ sont } x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 4}$

De la même façon :
$g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(4-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $4 - x = 0$

$\boxed{\text{Les solutions de } g(x) = 0 \text{ sont } x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 4}$

La forme factorisée va encore nous être utile pour la dernière équation, sa résolution étant facilitée par la racine commune aux 2 polynômes.

$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x-4) - 3x(4-x) = 0 \Leftrightarrow (x-4)\left(2(x-2)+3x\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)\left(5x-4\right) = 0 \Leftrightarrow x-4=0$ ou $5x-4=0$

Finalement les solutions de $f(x) - g(x) = 0$ sont $x_1 = 4$ et $x_2 = \frac{4}{5}$.

5. Pour que $Q(x)$ soit définie, il faut $g(x) \neq 0$.

Avec la question précédente on conclut $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{0,4\}$

Pour que $Q(x) = 0$, il faut que $f(x) = 0$ et $x \in \mathscr{D}$.

Et donc la seule solution à $Q(x) = 0$ est $x = 2$

De la même façon, $Q(x) = 1$, il faut que $f(x) = g(x)$ et $x \in \mathscr{D}$.

Ainsi, la solution à $Q(x) = 1$ est $x = \frac{4}{5}$

6. Pour x dans $\mathscr{D}$, on peut écrire :

$Q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2(x-2)(x-4)}{3x(4-x)} = -\frac{2(x-2)}{3x}$

Et donc $Q'(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{x-2}{x}\right)$

7. $Q'(x) = -1 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\left(\frac{x-2}{x}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x - 4 = 3x$

Ce qui donne finalement la solution à $Q'(x) = -1$ est $x = -4$

$\left|Q'(x)\right| = 2 \Leftrightarrow Q'(x) = 2$ ou $Q'(x) = 2$

Résolvons donc ces 2 équations :

$Q'(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\left(\frac{x-2}{x}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} = -3 \Leftrightarrow x - 2 = -3x \Leftrightarrow 4x = 2$

La solution à $Q'(x) = 2$ est $x = \frac{1}{2}$

Nous allons aller plus rapidement pour l'autre partie, car le calcul est exactement le même au signe du membre de droite près.

$Q'(x) = -2 \Leftrightarrow x - 2 = 3x$

La solution à $Q'(x) = -2$ est $x = -1$

Finalement, les 2 solutions de $\left|Q'(x)\right| = 2$ sont $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = -1$

<u>Remarque :</u> je me rends compte après coup que j'ai beaucoup utilisé le symbole d'équivalence ⇔ par réflexe alors qu'il n'est probablement pas connu en 3ème. Il signifie simplement que les 2 propositions à gauche et à droite du symbole ont la même signification.

Géométrie

1. La figure sera complétée et insérée en fin d'exercice.

2.

a. Pour montrer que $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BE}$, nous allons étudier le triangle ABE

$AB = 10$ et $AB^2 = 100$

$AE^2 = \left(x_E - x_A\right)^2 + \left(y_E - y_A\right)^2 = 4 + 16 = 20$

De la même façon, on trouve : $BE^2 = \left(x_E - x_B\right)^2 + \left(y_E - y_B\right)^2 = 64 + 16 = 80$

Ainsi ABE est rectangle en E

Et donc $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BE}$

b. Par propriété des triangles rectangles, le centre de leur cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.

Ainsi, E appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $\left[AB\right]$.

3.

a. Par construction OKB est un triangle rectangle en K.

<u>Rappel :</u> tout triangle dont 2 sommets forment le diamètre d'un cercle et le 3ème point est également sur ce cercle est un triangle rectangle.

Comme de plus $(BK) = (BE)$, on a $(OK) \perp (BE)$ et $(AE) \perp (BE)$. Ce qui signifie que (OK) et (AE) sont perpendiculaires à une même droite.

Ce qui permet de conclure que $(OK)//(AE)$

b. On a O milieu de $\left[AB\right]$ et d'après le théorème de Thales : $\dfrac{BO}{BA} = \dfrac{BK}{BE} = \dfrac{1}{2}$

On déduit que K est le milieu de $[BE]$

c. Les coordonnées du milieu d'un segment sont données par les formules :

$$x_K = \frac{x_E + x_B}{2} = \frac{3 + (-5)}{2} = -1$$

$$y_K = \frac{y_E + y_B}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2$$

On trouve finalement les coordonnées $K\,(-1{,}2)$

4.

a. $FK^2 = (-1-1)^2 + \left(2-(-2)\right)^2 = 4 + 16 = 20$

$KE^2 = \left(3-(-1)\right)^2 + (4-2)^2 = 16 + 4 = 20$

<u>Remarque :</u> on ne cherche pas la longueur des segments, mais uniquement à les comparer entre elles. Comme une longueur est forcément positive, on peut comparer les carrés pour obtenir le résultat en gardant une écriture un peu plus légère, sans les racines.

On conclut donc que $FK = KE$

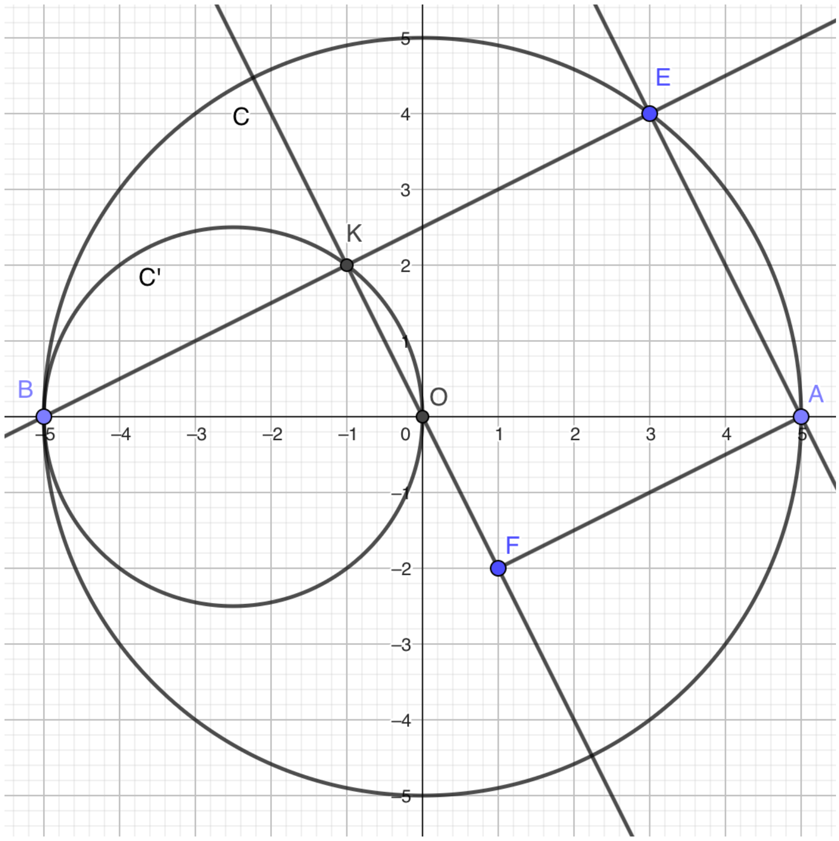
b. Je n'insiste pas sur la rédaction de cette question.

On trouve que $FA = AE = FK = KE$

Par ailleurs, on sait déjà que $AEKF$ possède 2 angles droits.

$\boxed{\text{Cela permet de conclure que } AEKF \text{ est un carré.}}$

La figure correspondante :



©antoine.remond.maths@gmail.com