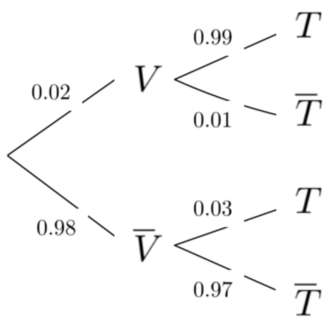
Bac 2011 série S - Métropole

Exercice 1 :

Partie A :

1.
a. D'après les données de l'énoncé :
$P(V) = 2\,\% = 0.02$
$P_V(T) = 0.99$
$P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0.97$

Et l'arbre de décisions :



b. On connaît la formule : $P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T)$

Et donc $P(V \cap T) = 0.02 \times 0.99 = 0.0198$

2. On a : $P(T) = P(V \cap T) + P\left(\overline{V} \cap T\right) = 0.0198 + 0.98 \times 0.97 = 0.0198 + 0.0294$

Et donc $P(T) = 0.0492$

3.
a. On doit calculer la probabilité conditionnelle $P_T(V)$.
On utilise la même formule que pour la question 1.b. : $P(V \cap T) = P_T(V) \times P(T)$
Et donc $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)}$

Finalement $P_T(V) = \dfrac{0.0198}{0.0492} = 04024 \approx 40\,\%$

Ce qui correspond bien à l'affirmation de l'énoncé ! Ceci indique que le test n'est pas fiable.

b. On veut cette fois calculer $P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)$.
Or $P\left(\overline{T} \cap \overline{V}\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right)$

De plus, $P\left(\overline{T} \cap \overline{V}\right) = 0.98 \times 0.97 = 0.9506$
Et $P\left(\overline{T}\right) = P\left(\overline{T} \cap \overline{V}\right) + P\left(\overline{T} \cap V\right) = 0.9506 + 0.02 \times 0.01 = 0.9508$ (ou avec la formule $P\left(\overline{T}\right) = 1 - P(T)$)

Finalement $P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right) = 0.9998.$

Partie B :

1.

a. En reprenant les notations de la partie A, chaque expérience de X présente 2 résultats possibles « succès » = V, la personne est contaminée et « échec » = $\overline{V}$. De plus, d'après l'énoncé, chaque expérience est indépendante.

Donc X suit une loi binomiale de paramètre $p = 0.02$

b. Pour trouver la probabilité d'avoir au moins 2 personnes contaminées, on va s'intéresser à l'événement contraire, qui correspond à aucun malade ou 1 seul malade.

$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$

<u>Rappel :</u> pour une loi binomiale, on a $P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1 - p\right)^{n-k}$.

Dans notre cas, $n = 10$ et $p = 0.02$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.98)^{10} = 0.8171$$
$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \times 0.02 \times (0.98)^9 = 0.1667$$

Et donc $P(X \geqslant 2) = 1 - 0.8171 - 0.1667 = 0.0162$

Exercice 2 :

1. D'après les propriétés des transformations dans le plan complexe, on a (avec des notations évidentes) :

$z_E - z_A = \left(z_D - z_A\right) e^{i\frac{\pi}{3}}$ avec $z_A = 1$ et $z_D = -i$

Donc $z_E - 1 = -(1 + i)\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}(1 + i)\left(1 + i\sqrt{3}\right) = -\dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right)\right)$

Et finalement $z_E = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i)$ (réponse 2)

2. Si on note M le point d'affixe z :

$\left|z + i\right|$ représente la distance MD

$\left|z - 1\right|$ représente la distance MA

Et donc $\left|z + i\right| = \left|z - 1\right|$ signifie que M est à la même distance de A et de D

L'ensemble des M tels que $\left|z + i\right| = \left|z - 1\right|$ est la médiatrice de $[AD]$ (réponse 4)

3. Si $\dfrac{z + i}{z + 1}$ est un imaginaire pur, son argument est de $\dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

Or $arg\left(\frac{z+i}{z+1}\right)$ représente l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MC}$. (Avec les même notations que dans la question précédente). Et $\overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{MC}$

L'ensemble des M tels que $\frac{z+i}{z+1}$ soit imaginaire pur est le cercle de diamètre $[CD]$ privé de C (réponse 2)

4. $arg\,(z-i) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ peut s'écrire $z - i = -ai \;\; a \in \mathbb{R}_+^*$

Ou $z = (1-a)\,i \;\; a \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc l'ensemble des M tels que $arg\,(z-i) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ est la demi-droite $]BD)$ (réponse 3)

Exercice 3 :

Partie A :

1.
a. $\forall x \in \mathbb{R},\; f_1(x) = xe^{-x}$
Commençons par la limite en $-\infty$ car elle ne présente pas de forme indéterminée :
Quand $x \to -\infty$, $e^{-x} \to +\infty$

Donc quand $x \to -\infty, f_1(x) \to -\infty$

Quand $x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$, mais par croissances comparées, nous savons que $xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \to 0$

Ainsi, $x \to +\infty, f_1(x) \to 0$

b. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de 2 fonctions qui le sont.
<u>Rappel :</u> la dérivée d'un produit de fonctions uv *est* $(uv)' = u'v + uv'$

$\forall x \in \mathbb{R},\; f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\; e^{-x} > 0, f_1'$ est du signe de $1-x$.
Ce qui donne :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f_1'		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

c. Sur le graphique on voit que f_k tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$. Ce qui implique que k est pair.

Donc k est un entier supérieur ou égal à 2

2.

a. On remarque immédiatement que $\forall n \geqslant 1,\ f_n(0) = 0$

On note également que $\forall n \geqslant 1,\ 1^n = 1$ et donc $f_n(1) = \dfrac{1}{e}$

$\boxed{\text{Donc toutes les courbes } \mathscr{C}_n \text{ passent par } O\,(0{,}0) \text{ et } \left(1,\dfrac{1}{e}\right)}$

b. On va dériver à nouveau un produit comme dans la question 1.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}$

$\boxed{\text{Ce qui confirme } \forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\,e^{-x}}$

3. En utilisant la formule précédente, on trouve que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_3'(x) = x^2(3-x)\,e^{-x}$ et donc que f_3' est du signe de $3 - x$.

Ceci implique que f_3 est croissante jusqu'à $x = 3$, puis décroissante.

$\boxed{\text{On confirme donc que } f_3 \text{ admet un maximum pour } x = 3.}$

4.

a. T_k est la tangente à $\mathscr{C}_k$

En utilisant à nouveau la formule de la dérivée des f_k, on a $f_k'(1) = \dfrac{k-1}{e}$

L'équation de T_k est $y = \dfrac{k-1}{e}x + b,\ b \in \mathbb{R}$.

Comme elle passe par $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$, on a $\dfrac{1}{e} = \dfrac{k-1}{e} + b$ d'où $b = \dfrac{2-k}{e}$

Ce qui donne l'équation de T_k : $y = \dfrac{k-1}{e}x + \dfrac{2-k}{e}$

On cherche le point de T_k tel que $y = 0$:

$0 = \dfrac{k-1}{e}x + \dfrac{2-k}{e}$

Ce qui donne bien $x = \dfrac{k-2}{k-1}$

$\boxed{\text{Et donc } T_k \text{ passe par le point } \left(\dfrac{k-2}{k-1},0\right)}$

b. On déduit que $\boxed{\text{sur le graphique } k = 6}$

Partie B :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x e^{-x} dx$

Nous allons procéder à une intégration par partie :

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = -\left[x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{1}{e} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$$

Et finalement $I_1 = 1 - \dfrac{2}{e}$

2.

a. D'après le graphique, on a l'impression que la courbe s'« écrase » quand n augmente.

On conjecture donc que $\left(I_n\right)$ est décroissante.

b. Pour confirmer notre conjecture, nous allons étudier la quantité $I_{n+1} - I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx - \int_0^1 x^n e^{-x}dx = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}dx$ (par linéarité de l'intégrale)

D'où $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-x}\left(x^{n+1} - x^n\right)dx$

Or, $\forall x \in \left[0{,}1\right],\ x^{n+1} < x^n$ (et $e^{-x} > 0$) et donc $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\left(x^{n+1} - x^n\right)dx < 0$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n < 0$, ce qui confirme que $\left(I_n\right)$ est décroissante

c. Comme on a également que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0$,
$\left(I_n\right)$ est décroissante et minorée et on peut appliquer le théorème de la limite monotone.

Et donc $\left(I_n\right)$ est convergente.

d. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx$ car $\forall x \in \left[0{,}1\right],\ e^{-x} \leqslant 1$

Et $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Cela permet d'obtenir l'encadrement : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Et d'après le théorème des gendarmes, on conclut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(I_n\right) = 0$

Exercice 4 - hors spécialité :

Partie A :

1. Par définition du projeté orthogonal, le vecteur $\overrightarrow{M_0H}$ est orthogonal à $\mathscr{P}$. Et avec la propriété rappelée, $\overrightarrow{M_0H}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires et $\left|\cos\left(\overrightarrow{M_0H}, \overrightarrow{n}\right)\right| = 1$

D'après la formule du produit scalaire : $\overrightarrow{M_0H}\,.\,\overrightarrow{n} = \|\overrightarrow{M_0H}\| \times \|\overrightarrow{n}\| \times \cos\left(\overrightarrow{M_0H}, \overrightarrow{n}\right)$

$\|\overrightarrow{M_0H}\| = M_0H$ et $\|\overrightarrow{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Finalement : $\left|\overrightarrow{M_0H}\,.\,\overrightarrow{n}\right| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. On va calculer dans cette question le produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs.

<u>Rappel :</u> *pour 2 vecteurs* $\overrightarrow{u}\left(x, y, z\right)$ *et* $\overrightarrow{v}\left(x', y', z'\right)$ *le produit scalaire est* $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

On a $\overrightarrow{n}\left(a, b, c\right)$

Il faut trouver les coordonnées de H :
Une représentation paramétrique de $\left(M_0H\right)$ est :

$$\begin{cases} x = ak + x_0 \\ y = bk + y_0 \quad k \in \mathbb{R} \\ z = ck + z_0 \end{cases}$$

Et donc H est sur cette droite $\left(M_0H\right)$ et de $\mathscr{P}$.
En intégrant les paramètres dans l'équation de $\mathscr{P}$: $a\left(ak + x_0\right) + b\left(bk + y_0\right) + c\left(ck + z_0\right) + d = 0$
D'où $k\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$ et $k = \dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$

Les coordonnées de H sont $\begin{cases} x = a\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} + x_0 \\ y = b\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} + y_0 \\ z = c\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} + z_0 \end{cases}$

Et celles de $\overrightarrow{M_0H}\left(a\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}, b\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}, c\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$

Cela donne
$\overrightarrow{M_0H}\,.\,\overrightarrow{n} = a^2\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} + b^2\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2} + c^2\dfrac{-ax_0 - by_0 - cz_0 - d}{a^2 + b^2 + c^2}$

On conclut : $\boxed{\overrightarrow{M_0H}\,.\,\overrightarrow{n} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d}$

3. On connaît la propriété : Si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à $\mathscr{P}$, $d\left(M_0, \mathscr{P}\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{M_0H}\,.\,\overrightarrow{n}\right|}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|}$

Avec les résultats précédents, on obtient directement : $\boxed{d\left(M_0, \mathscr{P}\right) = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$

Partie B :

1.
a. 2 vecteurs forment un plan ssi ils ne sont pas colinéaires
Or $\overrightarrow{AB}\left(-7, 1, -5\right)$ et $\overrightarrow{BC}\left(4, 1, 6\right)$. Compte-tenu de leurs coordonnées on remarque immédiatement qu'ils ne sont pas coliénaires.

Et A, B, C forment un plan.

$\overrightarrow{n}\left(a, b, c\right)$ est orthogonal à $\mathscr{P}$ ssi il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

On a donc le système :
$$\begin{cases} -7a+b-5c=0 & (1) \\ 4a+b+6c=0 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)\ :\ 11a+11c=0$ ou $a=-c$
En réinjectant dans l'une ou l'autre des équations, on obtient $b=2a$

En posant $a=1$, on trouve $\overrightarrow{n}\,(1,2,-1)$ et donc l'équation de $\mathscr{P}$ est $x+2y-z+d=0,\ d\in\mathbb{R}$

Avec $A\in\mathscr{P}$, on trouve : $4+2-5+d=0$ et $d=-1$

Et l'équation de $\mathscr{P}$ est $x+2y-z-1=0$

b. Nous allons calculer la distance cherchée en utilisant la formule de la question précédente :
$$d\left(F,\mathscr{P}\right)=\frac{\left|-7-4-1\right|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}$$

Finalement, $d\left(F,\mathscr{P}\right)=2\sqrt{6}$

2.
a. Une représentation paramétrique de Δ est :

$$\Delta : \begin{cases} x=k-7 \\ y=2k & k\in\mathbb{R} \\ z=-k+4 \end{cases}$$

b. H est sur Δ et $\mathscr{P}$, il vérifie le système précédent et en l'intégrant dans l'équation de $\mathscr{P}$:
$k-7+4k+k-4-1=0$, d'où $k=2$

Et $H\left(-5,4,2\right)$

c. $FH=\sqrt{2^2+4^2+2^2}=\sqrt{24}$

Et on retrouve $d\left(F,\mathscr{P}\right)=2\sqrt{6}$

3.
a. Calculons la distance BF :
$$BF=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{36}=6$$

Et donc B appartient à $\mathscr{S}$

b. Le centre du cercle $\mathscr{C}$ est le projeté orthogonal de F sur $\mathscr{P}$, donc H.
Son rayon va donc être HB.
Et $HB=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Donc le cercle $\mathscr{C}$ est de centre H et de rayon $2\sqrt{3}$

Exercice 4 - spécialité :
Partie A :

1. On considère $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$
Ces hypothèses supposent que les 3 entiers sont non nuls.

Comme $a \mid bc$, $\exists k \in \mathbb{Z},\ bc = ka$
Et d'après le théorème de Bezout, $a \wedge b = 1$ implique que (est même équivalent à)
$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1$

On peut donc écrire $acu + bcv = c$ (en multipliant l'égalité par c) et par hypothèse $acu + kav = c$.
Donc $a\left(cu + kv\right) = c$

Ce qui confirme que si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$, $a \mid c$

2. On a $\exists \left(p, q\right) \in \mathbb{N}^2,\ p \wedge q = 1$
En réécrivant les hypothèses, $\exists k \in \mathbb{Z},\ a = kp$ et $\exists k' \in \mathbb{Z},\ a = k'q$

Ceci donne $kp = k'q$. Ainsi q divise kp et d'après le théorème de Gauss, q divise k.
Ainsi $\exists l \in \mathbb{Z},\ k = lq$ et $a = lqp$.

On conclut donc que si $p \wedge q = 1$, $a \equiv 0 \left[p\right]$, $a \equiv 0 \left[q\right]$ alors $a \equiv 0 \left[pq\right]$

Partie B :

1.
a. 5 et 17 sont 2 nombres premiers, donc en particulier ils sont premiers entre eux.

Le théorème de Bezout nous assure que $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ 17u + 5v = 1$

b. $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$
Or $17u + 5v = 1$, donc $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times (1 - 17u) = 17 \times \left(-6u\right) + 9$
Et on a bien $n_0 \equiv 9 \left[17\right]$

On montre de la même façon $n_0 \equiv 3 \left[5\right]$ *(N'hésitez pas à le faire si besoin !)*

Ainsi $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ appartient à $\mathcal{S}$

c. On peut prendre $(u, v) = (-2{,}7)$: $17 \times (-2) + 5 \times 7 = 1$

Dans ce cas, $n_0 = 3 \times (-34) + 9 \times 35 = 213$ est dans $\mathcal{S}$

2.
a. Étudions le comportement de $n - n_0$ modulo 17 :
Comme n et n_0 sont dans $\mathcal{S}$, il existe p et q dans $\mathbb{Z}$:
$n = 17p + 9$ et $n_0 = 17q + 9$.

Cela donne $n - n_0 = 17\left(p - q\right)$ et donc $n - n_0 \equiv 0 \left[17\right]$
On va trouver par le même raisonnement $n - n_0 \equiv 0 \left[5\right]$

Et avec la question A.2, $n - n_0 \equiv 0 \left[85\right]$

b. On peut écrire $n_0 = 213 = 2 \times 85 + 43$

D'après la question précédente : $\exists k' \in \mathbb{Z},\ n - n_0 = 85k'$
Et donc $n = 85\left(k' + 2\right) + 43$

$\boxed{\text{Ainsi pour } n \in \mathcal{S} \text{ il existe un entier relatif } k \text{ tel que } n = 85k + 43}$

3. Par chance, la mise en équation du problème se ramène au système que l'on a étudié dans les questions précédentes !

Le nombre n de jetons va s'écrire $n = 85k + 43$ et se situe entre 300 et 400.

$\boxed{\text{On trouve donc que Zoé a 338 jetons.}}$