Baccalauréat S Métropole groupe 1 bis[1] juin 1997

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Trois dés cubiques sont placés dans une urne.
Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6.
Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.
On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.
On note A l'évènement : « les deux dés tirés sont normaux ».
On note B l'évènement : « les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

1. **a.** Définir l'évènement contraire de A que l'on notera $\overline{A}$.
   b. Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$?
2. **a.** Calculer $p(B/A)$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p(B \cap A)$.
   b. Calculer $p(B)$.
3. Calculer $p(A/B)$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$ ayant comme unité graphique 4 cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 et i.

On considère l'application f de P$-${A} dans P qui, à tout point M de P$-${A} d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z+1}{z-2\text{i}}.$$

1. **a.** Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.
   b. Déterminer l'affixe du point C$'$ image de C. Quelle est la nature de quadrilatère ACBC$'$?
   c. Montrer que le point C admet un unique antécédent par f que l'on notera C$'$.
   Quelle est la nature du triangle BCC$'$?
2. Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de z'.
3. Déterminer, en utilisant la question précédente, quels sont les ensembles suivants :
   a. l'ensemble E_1 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre réel strictement négatif.
   b. l'ensemble E_2 des points M dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur non nul
   c. l'ensemble E_3 des points M dont les images appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 3 cm. Tout point M du plan est repéré par son affixe z.

---

1. Amiens, Lille, Paris Créteil, Versailles, Rouen, Aix-Marseille, Montpellier, Nice-Corse, Toulouse

1. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M du plan tels que $|z| = 3$.
2. On considère la transformation T qui à tout point M du plan distinct de O associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

   a. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction du module et de l'argument de z.

   b. Déterminer et représenter l'ensemble E', dont les éléments sont les points M' images des points M de E. Préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit N le point d'affixe $-\frac{1}{z}$.
   Montrer que M' est le milieu de $[MN]$.
4. Soit A le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   Montrer que, lorsque le point M décrit la demi-droite [OA) privée du point O, le point N décrit une demi-droite D.
   Tracer D.
5. Montrer que l'image de la demi-droite [OA) privée du point O par la transformation T est une partie d'une hyperbole H. Représenter H après avoir donné ses éléments caractéristiques.

PROBLÈME **11 points**

PARTIE A

Soit la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^x + x + 1.$$

1. Étudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a :

$$-1,28 < \alpha < -1,27$$

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \varphi x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f.
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
   Donner une équation de T et étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à T.
4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ et étudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à D.

5. Faire le tableau de variations de f.
6. Tracer sur un même dessin $(\mathscr{C})$, T et D. La figure demandée fera apparaître les points de $(\mathscr{C})$ dont les abscisses appartiennent à $[-2\,;\,4]$.

PARTIE C

On considère la fonction g, définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{x}\right).$$

On note $(\mathscr{L})$ la courbe représentative de g dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, I le point défini par $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \vec{\imath}$, A le point d'abscisse 0 de $(\mathscr{L})$ et B son point d'abscisse 1.

1. Étudier brièvement les variations de g.
2. Donner une équation de la tangente en A à $(\mathscr{L})$.
3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB].
   Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.
4. On admet que la courbe $(\mathscr{L})$ est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln\sqrt{2(1+\mathrm{e})}.$$

5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(1+\mathrm{e}) - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

6. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.