Bac série S 1995 - Pondichéry

Exercice 1 :

1. Reprenons déjà l'écriture alternative de z' indiquée dans l'énoncé :

$z' = \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{z\overline{z}}$ car $z \neq 0$ par hypothèse et $z\overline{z} = |z|^2$ (le résultat doit être connu, mais n'hésitez pas à refaire le calcul si besoin !)

Finalement, on retrouve bien $z' = \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$

En utilisant l'écriture exponentielle $z = re^{i\theta},\ r \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta \in [0,2\pi[$, on a $z' = \dfrac{1}{r}e^{i\theta}$ et donc z et z' on le même argument.

Cela permet de conclure que $O,\ M$ et M' sont alignés.

<u>Remarque :</u> on peut aussi noter que z et z' sont les affixes de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ et donc $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{1}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$.

Les 3 points sont donc alignés.

2. Si M est un point invariant de f, on a $z' = \dfrac{z}{|z|^2} = z$

Or, $\dfrac{z}{|z|^2} = z \Leftrightarrow z\left(1 - \dfrac{1}{|z|^2}\right) = 0$ et comme $z \neq 0$, cela signifie que $1 - \dfrac{1}{|z|^2} = 0$

Et donc, comme le module d'un complexe est forcément positif, cela équivaut à $|z| = 1$.

Ainsi, les points invariants de f, Γ, constituent le cercle unité.

Les points A et B font bien partie de Γ. (Je pense qu'il n'y a rien à ajouter, je vous laisse si besoin faire la vérification).

3. Par définition de $\mathscr{C}$, son centre est E (en tant que milieu d'un de ses diamètres).

De plus, on a son affixe $z_E = \dfrac{1}{2}(-1 + i)$

En utilisant cette fois la forme algébrique de l'affixe d'un point M, $z = x + iy$, on a que :

$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z - z_E|^2 = \dfrac{1}{2}$ ou $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

L'équation de $\mathscr{C}$ est donc $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

Cherchons maintenant l'affixe de E', grâce à la formule $z_{E'} = \dfrac{z_E}{\left|z_E\right|^2}$

Or $\left|z_E\right|^2 = \dfrac{1}{4}(1+1) = \dfrac{1}{2}$ et $z_{E'} = 2z_E = -1+i$

$\boxed{\text{On confirme donc que } E' \in \mathscr{C}.}$ (N'hésitez pas à poser le calcul si besoin !)

4.

a. Pour déterminer l'équation de (AB), nous allons d'abord trouver son coefficient directeur.
En écrivant l'équation sous la forme $y = ax + b$, $\left(a,b\right) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Ici, $a = 1$. Et comme la droite passe par $B\,(0{,}1)$, on trouve $b = 1$.

$\boxed{\text{L'équation de } (AB) \text{ est donc } y = x + 1}$

Par définition, $k = x^2 + y^2$
Mais comme $M \in (AB)$, $y = x + 1$, ce qui donne $\boxed{k = 2x^2 + 2x + 1}$

$$z' = \frac{z}{\left|z\right|^2} = \frac{x+iy}{k} = \frac{x+i(x+1)}{2x^2+2x+1}$$

$$M'E^2 = \left(\frac{x}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2x^2+2x+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x+2x^2+2x+1}{2\left(2x^2+2x+1\right)}\right)^2 + \left(\frac{2x+2-2x^2-2x-1}{2\left(2x^2+2x+1\right)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2x^2+4x+1}{2\left(2x^2+2x+1\right)}\right)^2 + \left(\frac{1-2x^2}{2\left(2x^2+2x+1\right)}\right)^2 = \frac{\left(\left(2x^2+2x+1\right)+2x\right)^2 + \left(2x^2-1\right)^2}{4\left(2x^2+2x+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2x^2+2x+1\right)^2 + 4x^2 + 4x\left(2x^2+2x+1\right) + 4x^4 - 4x^2 + 1}{4\left(2x^2+2x+1\right)^2} = \frac{\left(2x^2+2x+1\right)^2 + 4x\left(2x^2+2x+1\right) + 4x^4 + 1}{4\left(2x^2+2x+1\right)^2}$$

On « remarque » que :
$\left(2x^2+2x+1\right)\left(2x^2-2x+1\right) = 4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x^3 - 4x^2 + 2x + 2x^2 - 2x + 1 = 4x^4 + 1$
<u>Remarque :</u> évidemment, je suis parti du résultat pour trouver la bonne factorisation. Il y a peut-être une méthode plus simple pour arriver au résultat, mais j'étais empêtré dans mon calcul !

Finalement, on a bien $M'E^2 = \dfrac{1}{2}$.

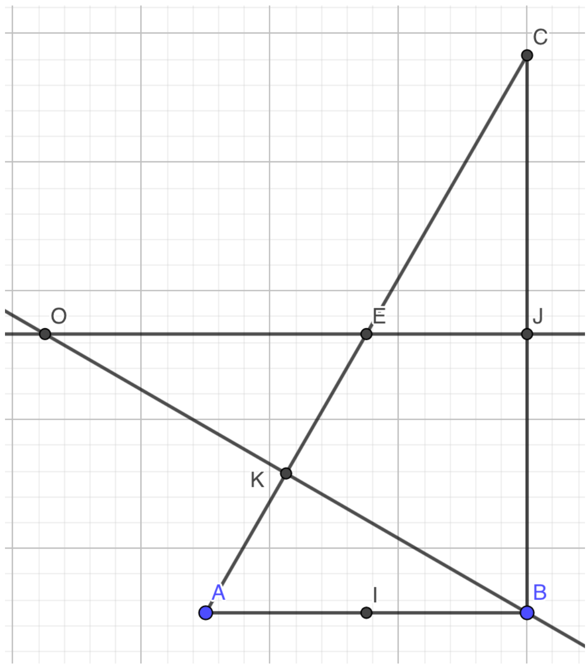
$\boxed{\text{Et on conclut que pour } M \in (AB),\ M' \in \mathscr{C}}$

b. En complément du résultat de la question précédente, on sait que O, M et M' sont alignés.

$\boxed{\text{On construit } M' \text{ comme l'intersection de } (OM) \text{ et } \mathscr{C}.}$

Exercice 2 - spécialité :

1. Par propriété des rotations, un point et son image sont à la même distance du centre O.
O doit donc être à l'intersection des médiatrices de $[AE]$ et $[BC]$.
Nous ajoutons le point K milieu de $[AE]$ dans la figue ci-dessous :



On remarque immédiatement que AKB est similaire à ABC et que $(AB)//(EJ)$ par la réciproque du théorème de Thales.
On en déduit que $\widehat{ABK} = \widehat{BOJ} = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Et par construction de O, $\widehat{AOE} = 2\widehat{KOE} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\widehat{BOC} = 2\widehat{BOJ} = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

Et on conclut que la rotation r de contre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ envoie A sur E et B sur C.

2.
a. Pour $k = 0$, on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EM'} = \overrightarrow{0}$

Donc si $k = 0$, $M = A$ et $M' = E$

Avec $k = \dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$

Si $k = \dfrac{1}{2}$, M est le milieu de $[AB]$ et M' est le milieu de $[EC]$.

Considérons maintenant $k = 2$: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = 2\overrightarrow{EC}$

Pour $k = 2$, M est le symétrique de A par rapport à B et M' celui de E par rapport à C.

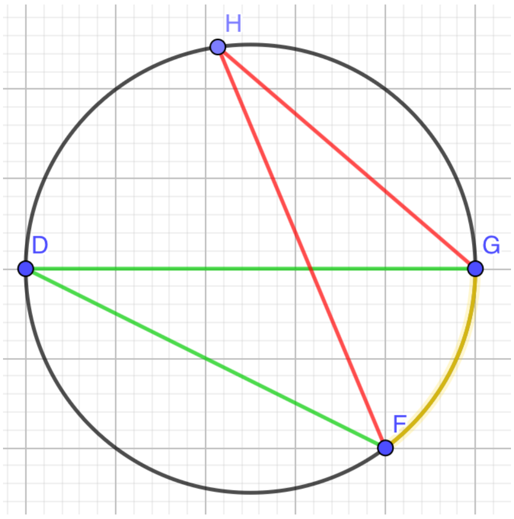
b. On a $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EM'} = k\overrightarrow{EC}$
On sait de plus que l'image de $[AB]$ est $[EC]$ et que la rotation conserve les distances et les angles, on déduit que l'image de $k\overrightarrow{AB}$ est $k\overrightarrow{EC}$.

En conséquence, l'image de M par r est M'.

Ceci implique que OMM' est un triangle isocèle. Mais comme $\widehat{OMM'} = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, les 2 autres angles qui sont égaux mesurent également $\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Finalement OMM' est un triangle équilatéral.

c. On rappelle que des points sont cocycliques s'ils appartiennent tous à un même cercle.
Pour démontrer cette propriété, on utilise le fait que les angles formés par 3 points du cercle interceptant une même corde ont tous la même mesure.
Dans l'exemple ce-dessous, on a $\widehat{FDG} = \widehat{FHG}$ car les 2 interceptent le même arc FG en orange.



Dans notre cas, nous avons $\widehat{OMM'} = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ par définition de r et $\widehat{AMM'} = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ par construction de ABC.

Cela nous permet de conclure que $O,\ A,\ M$ et M' sont cocycliques.

3.

a. On sait déjà que $\widehat{OMM'} = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et OMM' est un triangle équilatéral.

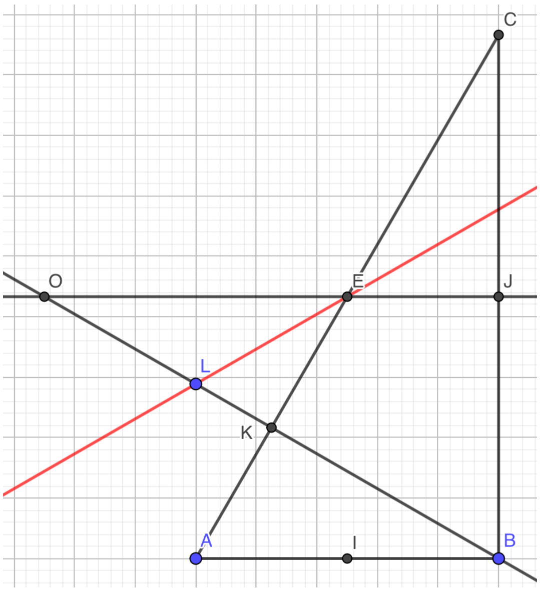
Dans un triangle équilatéral, la hauteur mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$ fois le côté. Et le centre du cercle circonscrit se situe aux $\frac{2}{3}$ en partant du sommet vers le milieu du côté opposé. On a donc $ON = \frac{\sqrt{3}}{3}OM$.

N est donc l'image de M par une similitude directe de centre O d'angle $\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b. On sait que l'image d'une droite est une droite. Cherchons 2 points appartenant à cette droite.
Cherchons déjà l'image de B par la transformation. Son image est sur (OJ) par construction, car c'est la médiatrice de $[BC]$.
De plus, on a $EJ = \frac{1}{2}AB$ (réciproque du théorème de Thales) et $OE = OA = AB$ (car $OEBA$ est un losange : ses diagonales sont orthogonales et se coupent en leur milieu).

Ce qui donne $OE = \dfrac{2}{3}OJ$ et finalement E est l'image de B !

Étudions maintenant l'image de A : cette image n'est pas un point déjà connu, c'est le point L de la figure, situé tel que $OL = \dfrac{2}{3}OK$.



Problème - spécialité :

Partie A :

1. On doit résoudre l'équation $(1)\ \ y'' + 2y' + y = 0$
Nous allons donc dans un premier temps chercher les racines de son équation caractéristique :
$x^2 + 2x + 1 = 0$
Son discriminant est $\Delta = 0$ et sa racine double est $x_1 = -1$.

$\boxed{\text{Les solutions de } (1) \text{ sont donc les fonctions } x \mapsto (\lambda x + \mu)\, e^{-x},\ \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$

2. En notant f la fonction recherchée, elle doit vérifier $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda e^{-x} - (\lambda x + \mu)\, e^{-x}$.

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$

Qui donne $\lambda = \mu = 0$.

$\boxed{\text{La solution particulière cherchée est } f : x \mapsto (x+1)\, e^{-x}}$

Remarque : on note que la fonction trouvée est celle étudiée dans la partie B, c'est toujours bon signe !

Partie B :

1.
a. f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x} - (x+1)\, e^{-x} = -xe^{-x}$
Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$, f' est donc du signe de $-x$.

©antoine.remond.maths@gmail.com

Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_-$, puis décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b. Étudions le comportement en $+\infty$:

$f(x) = \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$ et quand $x \to +\infty$, $e^x \to +\infty$.

Cela permet de conclure que $\dfrac{1}{e^x} \to 0$ et par croissance comparée, $\dfrac{x}{e^x} \to 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

En $-\infty$:

Il n'y a pas de forme indéterminée cette fois.

quand $x \to -\infty$, $1 + x \to -\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$.

Et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

c. En complément des limites précédentes, nous savons également que f admet un maximum en 0 et $f(0) = 1$.

D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d. Il y a manifestement une erreur dans l'énoncé, car le maximum de f vaut 1 !

Nous allons donc nous intéresser à résoudre $f(x) = \dfrac{1}{4}$ qui correspond au reste de la question.

D'après le tableau de variation ci-dessus, on peut effectivement affirmer que $f(x) = \dfrac{1}{4}$ admet exactement 2 solutions. L'une est négative, α et l'autre positive, β.

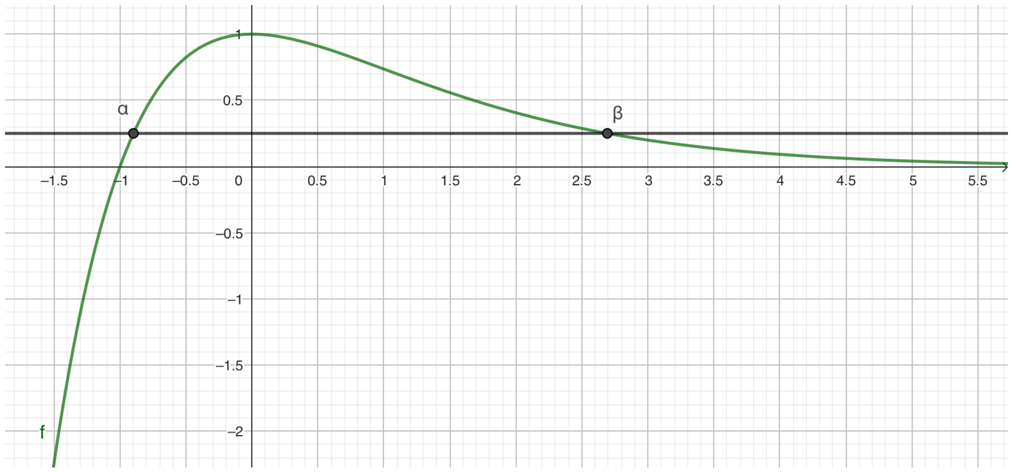
De plus : $f(-1) = 0$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} \approx 0.82 > \dfrac{1}{4}$

Cela permet de conclure que $\alpha \in \left]-1, -\dfrac{1}{2}\right[$.

Numériquement on trouve : $f\left(2.69\right) \approx 0.2504$ et $f(2.70) \approx 0.2486$

Et on obtient l'approximation $\beta \in \left]2.69{,}2.70\right[$

2.
a.



b. $\mathscr{A}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t)\,dt = \int_0^\lambda (1+t)e^{-t}dt$

Procédons à une intégration par partie.

$$\int_0^\lambda (1+t)e^{-t}dt = -\left[(1+t)e^{-t}\right]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-t}dt = -(1+\lambda)e^{-\lambda} + 1 - \left[e^{-t}\right]_0^\lambda$$
$$= -(1+\lambda)e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda} + 1 = 2 - (2+\lambda)e^{-\lambda}$$

Donc $\mathscr{A}(\lambda) = 2 - (2+\lambda)e^{-\lambda}$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 2$

3.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}, f_k$ est dérivable comme produit de fonctions qui le sont. On suppose de plus dans cette partie que $k \neq 0$ (pour que le terme en exponentiel ne soit pas constant égal à 1.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k'(x) = e^{-kx} - k(x+1)e^{-kx} = e^{-kx}\left(1 - k(x+1)\right)$$

b. Comme déjà rappelé, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-kx} > 0$ et f_k' est du signe de $1 - k(x+1)$

Nous allons donc suivre la proposition de l'énoncé.

<u>Si $k > 0$:</u>

$1 - k(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant k(x+1)$

Et donc $x \leqslant \frac{1}{k} - 1$ *(<u>Remarque :</u> c'est à cette étape qu'on utilise le signe de k, car la division par un nombre négatif change le signe de l'inégalité. Cette propriété est connue depuis le collège mais il faut bien y faire attention dans le calcul littéral où c'est moins visible).*

Donc si $k > 0, f_k$ est croissante entre $\left]-\infty, \frac{1}{k} - 1\right]$ puis décroissante.

On ne refait pas le rapide calcul pour k négatif, dans ce cas, la division change le sens de l'inégalité car précisé dans la remarque.

Donc si $k > 0, f_k$ est décroissante entre $\left]-\infty, \frac{1}{k} - 1\right]$ puis croissante.

c. La courbe $\mathscr{F}$ correspond à la fonction affine $x \mapsto x+1$ et donc $\underline{k=0}$

La courbe $\mathscr{G}$ a son maximum en 0 et correspond à la fonction étudiée en B.1 et correspond à $\underline{k=1}$

La courbe $\mathscr{H}$ correspond également à un k positif. Son maximum est atteint pour $x=\dfrac{1}{k}-1$ et vaut environ 5 d'après le graphique.
Donc $\left(\dfrac{1}{k}-1+1\right)e^{-k\left(\frac{1}{k}-1\right)} \approx 5$ ou $\dfrac{1}{k}e^{k-1} \approx 5$. Comme on sait que k est entier, on vérifie numériquement et on trouve que la courbe $\mathscr{H}$ correspond à $\underline{k=4}$.

On remarque que la courbe $\mathscr{C}$ correspond à un k négatif. On note sur la courbe que la fonction vaut environ 5 en $x=1$. On trouve cette fois $\underline{k=-1}$.