∽ Baccalauréat C Étranger gr. I bis - Liban juin 1978 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans cet exercice, pour noter les entiers, on utilise le système décimal.
Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ constitué des entiers n qui possède les propriétés suivantes :

— 4 divise n
— n admet au moins dix diviseurs appartenant à $\mathbb{N}$
— il existe un entier premier p tel que $n = 37p + 1$.

1. Quel est le plus petit élément de E ?

2. Existe-t-il un élément n, de E, vérifiant $26\,800 < n < 27\,800$?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit E un plan vectoriel euclidien rapporté à une base $\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)$.
(Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de E est noté $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$).
Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans E, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \cos t\,\overrightarrow{a} + \sin t\,\overrightarrow{b}.$$

et φ' sa dérivée.

1. Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \varphi(\alpha)$ et $\varphi'(\alpha)$ constituent une base de E.

2. Pour tout réel t, décomposer $\varphi(t)$ dans une telle base.

3. Étudier l'ensemble des réels u tels que $\varphi(u) \cdot \varphi'(u) = 0$.

PROBLÈME **12 POINTS**

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que, $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout réel b strictement positif,

$$\begin{array}{ll}(\forall x \in \mathbb{R}) & \left[x \leqslant b \Rightarrow \mathrm{e}^x - 1 - x \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^b x^2\right] \\ \text{et} & \left[x \geqslant -b \Rightarrow \mathrm{e}^x - 1 - x \geqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-b} x^2.\right]\end{array}$$

b. Montrer que, pour tout réel a, il existe une application φ_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en a, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(a) = (x-a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t + \varphi_a(x)\right].$$

En déduire que f est différentiable.
Préciser la dérivée f' de f.

3. Soit P une primitive (sur $\mathbb{R}$) de f application définie par $u \longmapsto e^{-u^2}$.

À tout réel x, on associe l'application Q_x, de $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que Q_x est dérivable sur I ; expliciter sa dérivée.

Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-u^2}\,du = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}\,dt.$$

4. - Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f\left(x^2\right).$$

Soit g' sa dérivée.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Que peut-on dire da la fonction h telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 ?$$

Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ quand x tend vers $+\infty$?