Bac 1997 série S - Métropole gr 1

Exercice 1 :

1.

a. L'évènement $\overline{A}$ est le contraire de « les 2 dés tirés sont normaux »

$\boxed{\text{Ainsi } \overline{A} \text{ est « l'un des dés tirés est le dé spécial.}}$

b. Comme on a 3 dés qu'on supposera indistinguables au toucher, il y a 6tirages différents possibles.
Ce nombre étant restreint, nous pouvons les écrire. Les indices n'ont évidemment pas de valeur, c'est juste pour mieux distinguer les cas :

$N_1 - N_2$
$N_1 - S$
$N_2 - N_1$
$N_2 - S$
$S - N_1$
$S - N_2$

$\boxed{\text{On trouve } P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

<u>Rappel :</u> on a la formule : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
Dans le cas présent, on peut dénombrer directement ou utiliser la formule.

$\boxed{\text{Et donc : } P\left(\overline{A}\right) = \frac{2}{3}}$

2.

a. Considérant qu'on a tiré les 2 dés normaux, la probabilité d'avoir 2 faces sur 6 est de $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$\boxed{\text{Ainsi } P_A(B) = \frac{1}{36}}$

On utilise ensuite la formule : $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ et $P(B \cap A) = P(A) \times P_A(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{36}$

$\boxed{\text{Et donc } P(B \cap A) = \frac{1}{108}}$

b. $P(B) = P(B \cap A) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$
En reprenant les étapes de la question précédente :

$P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{12}$

Et $P\left(\overline{A} \cap B\right) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{18}$

$\boxed{\text{Finalement, } P(B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{108} = \frac{7}{108}}$

3. On va reprendre la formule : $P_B(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B)}$

$\boxed{\text{Ce qui donne } P_A(B) = \dfrac{1}{7}}$

Exercice 2 (hors spécialité) :

1.

a. Cf schéma ci-dessous

b. On a $z_C = i$

D'où $z_{C'} = \dfrac{i+1}{i-2i} = \dfrac{1+i}{-i}$

or $\dfrac{1}{i} = -\,i$ et ainsi $z_{C'} = i\,(1+i)$

$\boxed{\text{Donc } z_{C'} = i - 1}$

On constate que $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$

$\boxed{\text{Et donc } ACBC' \text{ est un parallélogramme.}}$

c. Cherchons à déterminer l'affixe de C'' un antécédent de C.

On a donc $z_C = \dfrac{z_{C''}+1}{z_{C''}-2i}$

Comme $z_C = i$, l'équation devient : $\dfrac{z_{C''}+1}{z_{C''}-2i} = i$

D'où $z_{C''} + 1 = i\left(z_{C''} - 2i\right)$ ou $z_{C''}(i-1) = 1 + 2i$

Finalement $z_{C''} = \dfrac{1+2i}{i-1} = \dfrac{(1+2i)(-1-i)}{2} = \dfrac{1-3i}{2}$

$\boxed{\text{On conclut bien que } C \text{ a un seul antécédent par } f \text{ dont l'affixe est } \dfrac{1-3i}{2}}$

Pour déterminer la nature de BCC'', nous allons étudier le produit scalaire $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BC''}$

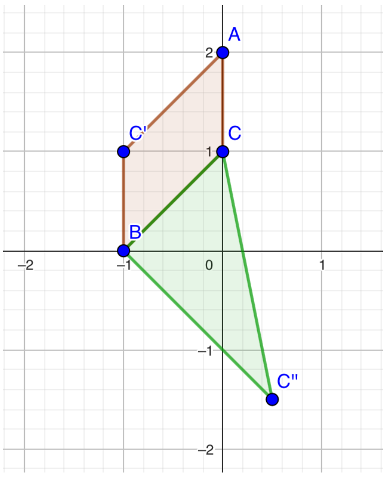
On a $\overrightarrow{BC}(1{,}1)$ et $\overrightarrow{BC''}\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

<u>Rappel :</u> le produit scalaire de $\overrightarrow{u}\,(x, y)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x', y')$ *est* $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = xx' + yy'$

On a donc immédiatement $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BC''} = 0$ et les 2 vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC''}$ sont orthogonaux.

$\boxed{\text{On conclut que } BCC'' \text{ est un triangle rectangle.}}$

La figure :



2. Dans la formule de z', on reconnaît le quotient de l'affixe de $\overrightarrow{MB}$ sur l'affixe de $\overrightarrow{MA}$.

<u>*Rappel :*</u> *si on considère les points A et B du plan d'affixes respectives z_A et z_B, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$. Cela correspond bien aux coordonnées dans le plan, avec des notations évidentes :* $\left(x_B - x_A\right) + i\left(y_B - y_A\right)$.

Et donc d'après les propriétés du quotient de 2 complexes :

$\left\|z'\right\|$ correspond au rapport entre les longueurs $\left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|$. $arg\left(z'\right)$ correspond à la différence des arguments des vecteurs $arg\left(\overrightarrow{MB}\right) - arg\left(\overrightarrow{MA}\right)$.

<u>*Remarque :*</u> *cette différence d'argument peut également être interprétée comme l'angle* $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$

On peut vérifier que cela correspond bien à $Z_{C'}$.

3.
a. L'énoncé propose de répondre aux questions suivantes à partir de la propriété mise en avant dans la question 2.

On cherche les points M dont l'image par f est un réel strictement négatif. Un réel strictement négatif se caractérise par un argument égal à $\pi\ [2\pi]$. On a de plus $M \neq B$ car $f(B) = O$.

Avec la remarque ajoutée, on veut que l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ mesure $\pi\ [2\pi]$.

Donc E_1 des points M dont l'image par f est un réel strictement négatif est $[AB] - \{B\}$

b. On veut cette fois que l'image de M soit un imaginaire pur, non nul. Cela signifie que l'argument de cette image est $\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

E_2 caractérise le cercle de centre le milieu de $[AB]$ et de diamètre $[AB]$, privé de A et B.

c. Le cercle de centre O est de rayon 1 est l'ensemble des points dont le module est 1.

Et d'après la question l'ensemble recherché correspond aux points équidistants de A et de B.

Donc E_3 est la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 2 (spécialité) :

1. Si l'affixe de M vérifie $|z| = 3$ alors $OM = 3$.

L'ensemble E des points vérifiant $|z| = 3$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

2.

a. On sait que $z' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ avec $z \neq 0$ par hypothèse.

Écrivons z sous la forme exponentielle $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0,2\pi[$.

Cela donne $z' = \frac{1}{2}\left(re^{i\theta} - \frac{1}{re^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2r}\left(r^2e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$.
En utilisant $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, on trouve :
$z' = \frac{1}{2r}\left(r^2\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$

Et finalement $z' = \frac{1}{2r}\left(\cos(\theta)\left(r^2 - 1\right) + i\sin(\theta)\left(r^2 + 1\right)\right)$

b. L'ensemble E est caractérisé par $r = 3$
En reportant dans l'équation de l'image explicitée ci-dessus, on obtient :
$z' = \frac{1}{6}\left(8\cos(\theta) + 10i\sin(\theta)\right) = \frac{4}{3}\cos(\theta) + \frac{5}{3}i\sin(\theta)$

On reconnaît l'équation paramétrique d'une ellipse.

E' correspond à l'ellipse d'équation $\frac{9x^2}{16} + \frac{9x^2}{25} = 1$

3. Cette question est évidente par propriété de l'affixe du milieu de 2 points.
<u>Rappel :</u> l'affixe du milieu de 2 points d'affixes z_1 et z_2 est $\frac{z_1 + z_2}{2}$. On retrouve, comme pour les affixes des vecteurs, la représentation des coordonnées « habituelles » dans le plan complexe.
Ainsi, l'affixe du milieu de $[MN]$ est $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

Et donc M' est bien le milieu de $[MN]$

4. Les points M de la demi-droite $[OA)$ ont un argument de $\frac{\pi}{3}$ par définition de A

Donc en notant z l'affixe de M, on a $z = re^{i\frac{\pi}{3}},\ r \in \mathbb{R}_+^*$.
Ce qui donne $-\frac{1}{z} = -\frac{1}{r}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

L'ensemble des points N décrit donc la demi-droite d'origine O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

5. Les questions 3 et 4 nous indiquent que la courbe à trouver est la « demi » hyperbole de sommet $S\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et d'asymptotes les 2 demi-droites de la question 4. Les coordonnées de A donnent les paramètres de l'hyperbole (attention, l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées !)

Problème :

Partie A

1. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables.
$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = e^x + 1 > 0$

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

On n'insiste pas sur les limites, il n'y a pas de forme indéterminée :

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty}$

2. Les résultats de la question précédente et le théorème des valeurs intermédiaires nous permettent de conclure immédiatement :

$\boxed{\text{L'équation } \varphi(x) = 0 \text{ possède une seule solution sur } \mathbb{R}.}$

On vérifie les valeurs numériques :
$\varphi(-1.27) = 0.01$ et $\varphi(-1.28) = -0.002$

$\boxed{\text{On conclue bien que } -1.28 < \alpha < -1.27}$

3. On déduit le signe de φ :

$\boxed{\forall x \leqslant \alpha,\ \varphi(x) \leqslant 0 \text{ et } \forall x \geqslant \alpha,\ \varphi(x) \geqslant 0.}$

Partie B

1. f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 1 \neq 0$.
Cela nous assure également la dérivabilité de f comme quotient de fonction dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\left(e^x + xe^x\right)\left(e^x+1\right) - xe^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + xe^{2x} + xe^x - xe^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + xe^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x\left(e^x + x + 1\right)}{(e^x+1)^2}$$

$\boxed{\text{Et donc on trouve bien : } \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x\varphi(x)}{(e^x+1)^2}}$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ et $\left(e^x+1\right)^2 > 0$, on déduit que f' est du même signe que φ

$\boxed{f \text{ est donc décroissante sur }]-\infty, \alpha], \text{ puis croissante sur } [\alpha, +\infty[.}$

2. $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1 + \alpha - \alpha}$

Et par définition, $e^\alpha + 1 + \alpha = 0$, ce qui implique : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{-\alpha} = -e^\alpha$

$\boxed{\text{Et en utilisant à nouveau la définition de } \alpha, \text{ on conclut } f(\alpha) = \alpha + 1.}$

De la partie A , on déduit $-0.28 < f(\alpha) < -0.27$

3. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\text{Et donc l'équation de } T \text{ est } y = \dfrac{x}{2}}$

Étudions la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{xe^x}{e^x+1} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{2xe^x - xe^x - x}{2(e^x+1)} = \dfrac{xe^x - x}{2(e^x+1)} = \dfrac{xe^x - x}{2(e^x+1)} = \dfrac{x\left(e^x-1\right)}{2(e^x+1)}.$

Or sur $\mathbb{R}$, $e^x + 1 > 0$ et x et $e^x - 1$ sont de même signe (je n'insiste pas, c'est une propriété basique de l'exponentielle).

$\boxed{\text{Finalement, } \forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{xe^x}{e^x+1} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x\left(e^x-1\right)}{2(e^x+1)} \geqslant 0 \text{ et } \mathscr{C} \text{ est au-dessus de } T.}$

4. Étudions déjà les limites de f.

En $-\infty$:

Par croissance comparée, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0}$

En $+\infty$:

Il faut cette fois levée une forme indéterminée « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ »

Écrivons $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1} = \dfrac{xe^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$

Et donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

Étudions l'asymptote en $+\infty$.

Repartons de l'écriture précédente :

$f(x) - x = \dfrac{x}{1+\frac{1}{e^x}} - x = \dfrac{x - x - \frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{-\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

Comme $1 + \dfrac{1}{e^x} \to 1$ et par croissance comparée, $\dfrac{x}{e^x} \to 0$, on a bien $f(x) - x \to 0$

$\boxed{\text{Et donc la droite } D \text{ est asymptote à } \mathscr{C}.}$

$\boxed{\text{La formule précédente nous indique également que } D \text{ est au-dessus de } \mathscr{C} \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

(et en-dessous sur $\mathbb{R}_-$)

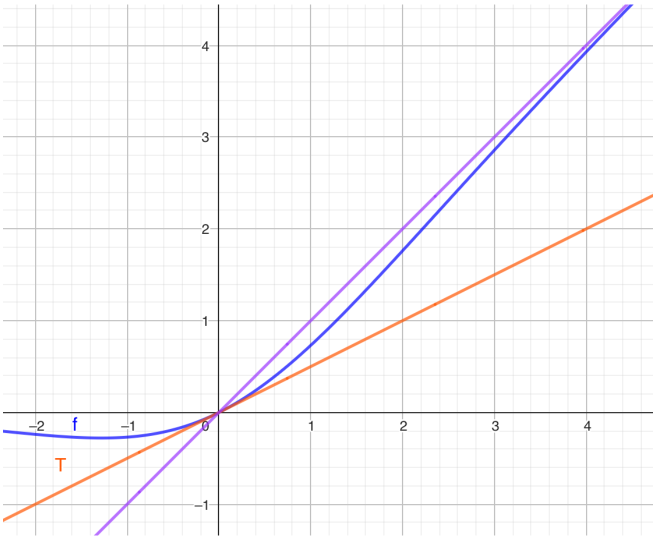
5. Pour récapituler :

f est donc décroissante sur $]-\infty, \alpha]$, puis croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{f \text{ admet un minimum en } \alpha : f(\alpha) = \alpha + 1 \approx -0.28}$

6. Graphiquement :



Partie C

1. g est bien définie et dérivable sur $[0,1]$ *(Rappel : le logarithme n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^*$)*

$\forall x \in [0,1],\ g'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} > 0$

$\boxed{g \text{ est donc croissante sur } [0,1] \text{ (et sur } \mathbb{R} \text{ d'ailleurs).}}$

2. L'équation de la tangente à $\mathscr{L}$ en 0 est donnée par l'équation : $y = g'(0)\,x + g(0)$

$\boxed{\text{Ce qui donne } y = \dfrac{x}{2} + ln(2)}$

3. Les 2 trapèzes sont constitués du rectangle $AOIM$ et d'un triangle rectangle AMB ou AMP. (Cf graphique en fin de problème pour le point M si besoin).

Or $\mathscr{A}_{AOIM} = ln(2)$

De plus $y_P = ln(2) + \dfrac{1}{2}$ et $y_B = ln(1+e)$

Donc $\mathscr{A}_{AMP} = \dfrac{1}{4}$ et $\mathscr{A}_{AMB} = \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$

$\boxed{\text{Et finalement } \mathscr{A}_{AOIP} = ln(2) + \dfrac{1}{4} \text{ et } \mathscr{A}_{AOIB} = ln(2) + \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)}$

4. $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ représente l'aire sous la courbe $\mathscr{L}$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

Avec l'indication donnée, elle se situe donc entre les aires des 2 trapèzes.

Ainsi, $ln(2) + \dfrac{1}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx \leqslant ln(2) + \dfrac{1}{2} ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$

Or $ln\,(2) + \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = ln\left(2\sqrt{\frac{1+e}{2}}\right) = ln\left(\sqrt{2\,(1+e)}\right)$ *(<u>Remarque :</u> on aurait pu utiliser cette forme dès la question précédente bien sûr, j'avais préféré laisser en exergue le « complément » à* $ln\,(2)$ *dans les aires.)*

Et on trouve bien l'encadrement : $ln\,(2) + \frac{1}{4} \leqslant \int_0^1 g\,(x)\,dx \leqslant ln\left(\sqrt{2\,(1+e)}\right)$

5. Procédons comme proposé à une intégration par parties :

$$\int_0^1 f\,(x)\,dx = \int_0^1 \frac{xe^x}{e^x+1}dx = \left[x\,ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1 - \int_0^1 ln\left(e^x+1\right)dx$$

Ce qui donne bien : $\int_0^1 f\,(x)\,dx = ln\,(e+1) - \int_0^1 g\,(x)\,dx$

6. En reprenant donc l'encadrement trouvé précédemment, on trouve *(<u>attention</u>, on change le signe, donc le sens des inégalités)*

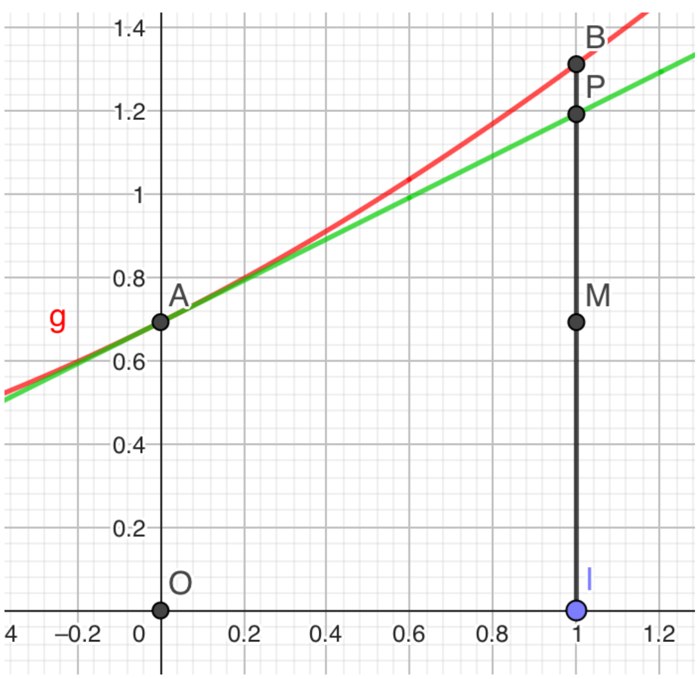
$$-ln\left(\sqrt{2\,(1+e)}\right) \leqslant -\int_0^1 g\,(x)\,dx \leqslant -\,ln\,(2) - \frac{1}{4}$$

Et $ln\,(e+1) - ln\left(\sqrt{2\,(1+e)}\right) \leqslant \int_0^1 f\,(x)\,dx \leqslant ln\,(e+1) - ln\,(2) - \frac{1}{4}$

En réagençant les logarithme, on conclut :

$$ln\left(\sqrt{\frac{e+1}{2}}\right) \leqslant \int_0^1 f\,(x)\,dx \leqslant ln\left(\frac{e+1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

Graphiquement, $\mathscr{L}$:



©antoine.remond.maths@gmail.com