Bac série C 1978 - Liban

Exercice 1 :

1. Étudions les premiers nombres de la forme « $37p+1$ » pour trouver le plus petit élément de E

- $\underline{p=2}$: donne $37p+1=75$ qui n'est pas divisible par 4.
- $\underline{p=3}$: $37p+1=112$. 4 divise bien 112, dont les diviseurs sont $\{1,2,4,7,8,14,16,28,56,112\}$

Ainsi, le plus petit élément de E est 112.

2. on cherche $n\in E$ et $26800<n<27800$.

Comme pour la première question, nous allons déjà identifier les candidats en étudier les nombres de la forme « $37p+1$ ».

Or $\dfrac{26799}{37}\approx 724.3$ et $\dfrac{27799}{37}\approx 751.3$ et entre eux, les nombres premiers sont : $727,\ 733,\ 739,\ 743$ et 751.

Etudions donc ces différents cas :

- $p=727$: $37p+1=26900$, qui n'est pas divisible par 4.
- $p=733$: $37p+1=27122$, qui n'est pas divisible par 4.
- $p=739$: $37p+1=27344$, qui est bien divisible par 4. Ses diviseur sont $\{1,2,4,8,16,1709,3418,6836,13672,27344\}$.

Et donc avec $n=27344$, on a bien $n\in E$ et $26800<n<27800$.

Exercice 2 :

$\forall t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{\varphi(t)}=cos(t)\,\overrightarrow{a}+sin(t)\,\overrightarrow{b}$

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$

φ est bien dérivable comme somme de fonctions dérivables.

$\forall t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{\varphi'(t)}=-sin(t)\,\overrightarrow{a}+cos(t)\,\overrightarrow{b}$

On a donc $\overrightarrow{\varphi(\alpha)}=cos(\alpha)\,\overrightarrow{a}+sin(\alpha)\,\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}=-sin(\alpha)\,\overrightarrow{a}+cos(\alpha)\,\overrightarrow{b}$

Comme nous sommes en dimension 2, pour que 2 vecteurs forment une base, il suffit qu'ils ne soient pas colinéaires. Il suffit donc que leur déterminant soit non nul.

Or $det\left(\overrightarrow{\varphi(\alpha)},\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}\right)=cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha)=1$

Et donc $\left(\overrightarrow{\varphi(\alpha)},\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}\right)$ forme bien une base de E

2. On considère $\alpha\neq 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$, sinon la base est inchangée au signe et l'ordre près.

D'après les expressions trouvées dans la question précédente :

$$\begin{cases}\frac{1}{cos(\alpha)}\overrightarrow{\varphi(\alpha)}=\overrightarrow{a}+tan(\alpha)\,\overrightarrow{b}\\ \frac{1}{sin(\alpha)}\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}=-\overrightarrow{a}+\frac{1}{tan(\alpha)}\overrightarrow{b}\end{cases}$$

En additionnant les 2 lignes :

$$\frac{1}{cos(\alpha)}\overrightarrow{\varphi(\alpha)}+\frac{1}{sin(\alpha)}\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}=tan(\alpha)\overrightarrow{b}+\frac{1}{tan(\alpha)}\overrightarrow{b}=\frac{1}{cos(\alpha)sin(\alpha)}\overrightarrow{b}$$

Et $\overrightarrow{b}=sin(\alpha)\overrightarrow{\varphi(\alpha)}+cos(\alpha)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}$

Et en intégrant dans la 1ère :

$$\overrightarrow{a}=\frac{1}{cos(\alpha)}\overrightarrow{\varphi(\alpha)}-tan(\alpha)\left(sin(\alpha)\overrightarrow{\varphi(\alpha)}+cos(\alpha)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}\right)=\frac{1-sin^2(\alpha)}{cos(\alpha)}\overrightarrow{\varphi(\alpha)}-sin(\alpha)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}$$
$$=cos(\alpha)\overrightarrow{\varphi(\alpha)}-sin(\alpha)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}$$

Et donc

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{\varphi(t)}=\varphi(t)=cos(t)\left(cos(\alpha)\overrightarrow{\varphi(\alpha)}-sin(\alpha)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}\right)+sin(t)\left(sin(\alpha)\overrightarrow{\varphi(\alpha)}+cos(\alpha)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}\right)$$
$$=\left(cos(t)cos(\alpha)+sin(t)sin(\alpha)\right)\overrightarrow{\varphi(\alpha)}+\left(sin(t)cos(\alpha)-cos(t)sin(\alpha)\right)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}$$

Et finalement $\forall t\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{\varphi(t)}=cos(t-\alpha)\overrightarrow{\varphi(\alpha)}+sin(t-\alpha)\overrightarrow{\varphi'(\alpha)}$

3. $\overrightarrow{\varphi(u)}.\overrightarrow{\varphi'(u)}=-cos(u)sin(u)+sin(u)cos(u)=0$

Donc $\forall u\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{\varphi(u)}.\overrightarrow{\varphi'(u)}=0$!

Problème :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{x}{cos^2(t)}}dt$

$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant cos(t)\leqslant 1$ et donc $\frac{1}{2}\leqslant cos^2(t)\leqslant 1$ et si $x\geqslant 0$, $e^{-\frac{x}{cos^2(t)}}\leqslant e^{-x}$

Finalement, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{x}{cos^2(t)}}dt\leqslant\frac{\pi}{4}e^{-x}$.

Et donc $\forall x\geqslant 0,\ f(x)\leqslant e^{-x}$

Comme on sait également que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geqslant 0$,

On conclut par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

2.

a. Soit b un réel strictement positif.

Posons $\forall x\in]-\infty,b],\ \varphi_1(x)=e^x-1-x-\frac{1}{2}e^bx^2$.

φ_1 est bien dérivable (2 fois et est même C^∞) :
$\forall x\in]-\infty,b],\ \varphi_1'(x)=e^x-1-e^bx$ et $\varphi_1''(x)=e^x-e^b\leqslant 0$

Ainsi φ' est décroissante et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$.
De plus, $\varphi_1'(0)=0$ et donc $\forall x\leqslant 0,\ \varphi_1'(x)\geqslant 0$ et $\forall x\geqslant 0,\ \varphi_1'(x)\leqslant 0$.
Ce qui nous indique que φ_1 est croissante sur $\mathbb{R}_-$ puis décroissante.

Et comme $\varphi_1(0)=0$, $\forall x\in]-\infty,b],\ \varphi_1(x)\leqslant 0$, ce qui signifie que :

$$\boxed{\forall x \in \left]-\infty, b\right],\ e^{x}-1-x \leqslant \frac{1}{2}e^{b}x^{2}.}$$

Etudions maintenant $\forall x \in \left]-b,+\infty\right],\ \varphi_2(x)=e^{x}-1-x-\frac{1}{2}e^{-b}x^{2}$.

φ_2 est également dérivable 2 fois :
$\forall x \in [-b,+\infty[,\ \varphi_2'(x)=e^{x}-1-e^{-b}x$ et $\varphi_2''(x)=e^{x}-e^{-b} \geqslant 0$

Le raisonnement est exactement le même que pour l'inégalité précédente et on conclut :

$$\boxed{\forall x \in [-b,+\infty[,\ e^{x}-1-x \geqslant \frac{1}{2}e^{-b}x^{2}.}$$

b. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Posons $\forall x \neq a,\ \varphi_a(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt$ et $\varphi_a(a)=0$

<u>Remarque :</u> on pourrait être tenté d'exhiber φ_a sous une forme « simple », mais personnellement je n'y suis pas parvenu ! On peut résoudre la question sans cela.

Etudions donc la continuité de φ_a en a :

$$\varphi_a(a+h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt=\frac{1}{h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a+h}{cos^2(t)}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}dt\right)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a+h}{cos^2(t)}}dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}h\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt\right)=\frac{1}{h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a+h}{cos^2(t)}}dt-e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}+h\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}\left(e^{-\frac{h}{cos^2(t)}}dt-1+\frac{h}{cos^2(t)}\right)dt\right)$$

On reconnaît la forme de la question précédente avec $x=-\dfrac{h}{cos^2(t)}$ et $b=4\left|h\right|$, on encadre :

$$\frac{1}{2}e^{-4|h|}\left(\frac{h}{cos^2(t)}\right)^2 \leqslant e^{-\frac{h}{cos^2(t)}}dt-1+\frac{h}{cos^2(t)} \leqslant \frac{1}{2}e^{4|h|}\left(\frac{h}{cos^2(t)}\right)^2$$

Et donc :

$$\frac{1}{2h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}e^{-4|h|}\left(\frac{h}{cos^2(t)}\right)^2dt\right)\leqslant \varphi_a(a+h)\leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}e^{4|h|}\left(\frac{h}{cos^2(t)}\right)^2dt\right)$$

Ou $\dfrac{he^{-4|h|}}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^4(t)}dt \leqslant \varphi_a(a+h) \leqslant \frac{he^{4|h|}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^4(t)}dt$

Et donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{h\to 0}\varphi_a(a+h)=0$.

> Finalement, $\forall a \in \mathbb{R}$, il existe une application φ_a, continue en a avec $\varphi_a(a)=0$ et
> $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)-f(a)=(x-a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt+\varphi_a(x)\right]$$

> Ceci implique directement que f est bien dérivable et $\forall a \in \mathbb{R},\ f'(a)=-\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt$

3. tan est dérivable sur I et comme $u \mapsto e^{-u^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
Et donc pour x dans $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\forall t \in I,\ Q_x'(t) = \frac{x}{cos^2(t)} e^{-(xtan(t))^2}}$$

On pose $u = xtan(t)$, d'où $du = \dfrac{x}{cos^2(t)}dt.$
Avec $xtan(0) = 0$ et $xtan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = x.$

$$\boxed{\text{On trouve bien } \int_0^x e^{-u^2}du = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-(xtan(t))^2}}{cos^2(t)}dt}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f\left(x^2\right) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{cos^2(t)}}dt$
Comme fonction composée, g est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$

En reprenant la question 2.b., on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{x^2}{cos^2(t)}}}{cos^2(t)}dt = -2x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\left(1+tan^2(t)\right)}}{cos^2(t)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2tan^2(t)}}{cos^2(t)}dt$$

$$\boxed{\text{Et en reprenant la question précédente : } \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du}$$

h est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = g'(x) + 2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}du = 0$
Donc h est constante !
Or, $\forall x \in \mathbb{R},\ h(0) = g(0) = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(x^2\right) = 0$

Cela permet de déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-u^2}du\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\text{Et on conclut le problème avec ce magnifique résultat : } \lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$