Dans ce chapitre, sauf indication contraire, la fonction φ_α fait référence à $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

Exercice 208 :

Soit $\alpha \in \left]0,1\right[$

a) En étudiant une fonction judicieuse, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1+x)^\alpha \leqslant 1 + x^\alpha$

b) Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$ avec $y > x$. Montrer que $y^\alpha - x^\alpha \leqslant \left(y-x\right)^\alpha$.

Solution :

a) Etudions la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 1 + x^\alpha - (1+x)^\alpha$

f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha\,(1+x)^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1}\left(1 - \left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\alpha-1}\right)$

Or, comme $\alpha \in \left]0,1\right[$, $\alpha - 1 < 0$, donc $\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{\alpha-1} < 1$ et $f'(x) > 0$.

Et comme $f(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Ce qui permet de conclure que } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1+x)^\alpha \leqslant 1 + x^\alpha}$

b) Etudions cette fois le comportement de $\left(\dfrac{y}{x}\right)^\alpha - \left(\dfrac{y}{x} - 1\right)^\alpha$ et en particulier sa position par rapport à 1

On pose $X = \dfrac{y}{x}$ et on sait que $X > 1$ et $f : X \mapsto X^\alpha - (X-1)^\alpha$.

f est bien dérivable et $\forall X > 1,\ f'(X) = \alpha X^{\alpha-1} - \alpha\,(X-1)^{\alpha-1} = \alpha\left(X^{\alpha-1} - (X-1)^{\alpha-1}\right)$

Comme $\alpha < 1$, $\alpha - 1 < 0$ et donc $X \mapsto X^{\alpha-1}$ est décroissante donc $\forall X > 1,\ f'(X) < 0$.

Comme $f(1) = 1$, $\forall X > 1,\ f(X) \leqslant 1$.

Ce qui signifie que pour x et y dans $\mathbb{R}_+$ avec $y > x$, $\left(\dfrac{y}{x}\right)^\alpha - \left(\dfrac{y}{x} - 1\right)^\alpha \leqslant 1$, ce qui peut s'écrire $y^\alpha - \left(y-x\right)^\alpha \leqslant x^\alpha$.

$\boxed{\text{Et on conclut donc que pour } x \text{ et } y \text{ dans } \mathbb{R}_+ \text{ avec } y > x,\ y^\alpha - x^\alpha \leqslant \left(y-x\right)^\alpha}$

Exercice 209 :

L'inégalité de Young

Soit $p \in \left]1, +\infty\right[$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel q (que l'on appelle parfois exposant conjugué de p) tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Vérifier que $q > 1$. Déterminer q pour $p = 2$ et $p = 4$.

b) On fixe y dans $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q} - xy$

c) Conclure que $\forall \left(x, y\right) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ xy \leqslant \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

Solution :

a) Procédons par analyse / synthèse :

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Leftrightarrow \frac{p+q}{pq}=1 \Leftrightarrow p+q=pq$$

Donc, si q existe, $q=\frac{p}{p-1}>1$ et est unique.

A l'inverse, $\frac{1}{p}+\frac{p-1}{p}=1$.

$$\boxed{\text{Donc } \exists !\ q=\frac{p}{p-1}>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$$

Pour $p=2,\ q=2$.
Pour $p=4,\ q=\frac{4}{3}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-xy$

f est dérivable comme fonction polynomiale et $f'(x)=x^{p-1}-y$

Donc f est décroissante entre $\left]0,y^{\frac{1}{p-1}}\right]$, puis croissante jusqu'en $+\infty$.

De plus, $f(0)=\frac{y^q}{q}>0$

Et $f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)=\frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p}+\frac{y^q}{q}-y^{\frac{1}{p-1}}y=\frac{y^q}{p}+\frac{y^q}{q}-y^{\frac{1}{p-1}+1}=y^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-y^q=0$, qui est donc le minima de la fonction.

c) On déduit de la question précédente $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-xy\geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ce qui permet de conclure } \forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2},\ xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.}$$

Exercice 210 :

Déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{(1{,}01)^x}{x^{2023}}$.

Solution :

On écrit : $\frac{(1{,}01)^x}{x^{2023}}=\frac{e^{x\ln(1{,}01)}}{e^{2023\ln(x)}}=e^{x\ln(1{,}01)-2023\ln(x)}=e^{x\left(\ln(1{,}01)-2023\frac{\ln(x)}{x}\right)}$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ par croissance comparée.

$$\boxed{\text{On conclut } \lim_{x\to+\infty}\frac{(1{,}01)^x}{x^{2023}}=+\infty}$$

<u>Remarque :</u> si je recommande toujours de regarder les représentations graphique, dans ce cas c'est assez trompeur, car le facteur mis à la puissance $1{,}01$ est très proche de 1 et la puissance de x très grande au dénominateur. La fonction est donc rapidement décroissance en partant de 0 avant de remonter très lentement. Le comportement asymptotique est donc impossible à voir et ce qui apparaît sur le graphique peut amener à douter.

Exercice 211 :

Trouver la limite en $+\infty$ de :

$f(x) = e^{-\sqrt{x}}x^2,\ g(x) = e^{-x^2}x^{10000},\ h(x) = ln(x)^8 e^{-x},$

$i(x) = \dfrac{(1{,}0001)^x}{x^{2023}},\ j(x) = \dfrac{ln\left(ln(x)\right)}{ln(x)}$

Solution :

<u>Remarque :</u> On est sur le même principe de croissances comparées que dans l'exercice précédent. Je ne rentre pas dans les détails.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\sqrt{x}}x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}x^{10000} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} ln(x)^8 e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} i(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1{,}0001)^x}{x^{2023}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} j(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\left(ln(x)\right)}{ln(x)} = 0$$

Exercice 212 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $y = \dfrac{1}{x}$, trouver la limite en 0_+ de $f_\alpha(x) = x^\alpha ln(x)$.

Solution :

On pose $y = \dfrac{1}{x}$ et y tend vers 0_+ quand x tend vers $+\infty$.

On peut écrire : $f_\alpha\left(y\right) = f_\alpha\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^\alpha ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{ln(x)}{x^\alpha}$

$\boxed{\text{Et donc } \lim_{x\to 0_+} f_\alpha(x) = 0_-}$

Exercice 213 :

En appliquant la méthode de démonstration du théorème 3 du 5.5, montrer que si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{(n!)^\alpha} = 0.$

Solution :

<u>Rappel :</u> *la méthode de la démonstration indiquée dans l'énoncé consiste à étudier les variations d'une suite en considérant le quotient de 2 termes consécutifs, ce qui est souvent plus pratique quand la suite présente des quotients, des produits ou des puissances.*

Définissons $\left(u_n\right)_{n>0}$ par son terme générique $u_n = \dfrac{a^n}{(n!)^\alpha}$.

Etudions donc le quotient de 2 termes consécutifs : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{a^{n+1}}{((n+1)!)^\alpha}}{\frac{a^n}{(n!)^\alpha}} = \dfrac{a}{(n+1)^\alpha}$.

On va forcément avoir un rang à partir duquel $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Cherchons ce rang : $\dfrac{a}{(n+1)^\alpha} < 1$ est équivalent à $a < (n+1)^\alpha$.

Ce qui implique : $n + 1 > a^{\frac{1}{\alpha}}$.
$\left(u_n\right)_{n>0}$ est donc décroissante à partir d'un certain rang et minorée par 0, donc convergente.

On utilise alors la propriété que si la limite l est différente de 0, comme (u_{n+1}) tend également vers l, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ devrait tendre vers 1.

Or ici $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{(n+1)^\alpha}$ tend vers 0, on conclut que $\left(u_n\right)_{n>0}$ tend vers 0.

$\boxed{\text{Et donc } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{(n!)^\alpha} = 0.}$

<u>Autre méthode :</u> comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0, on peut exhiber un rang à partir duquel ce rapport est inférieur à $\dfrac{1}{2}$ (par exemple, mais n'importe quelle valeur < 1), et on compare ensuite les termes de la suite à une suite géométrique. Si pour $n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$, $u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$, quantité qui tend vers 0. C'était d'ailleurs certainement plus simple…