Durée : 4 heures

Baccalauréat C Métropole groupe 1 [1] juin 1992

EXERCICE 1 **4 points**

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$$

sachant que l'une de ses solutions est un nombre entier.

2. Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère les points M_1, M_2, M_3 et Ω d'affixes respectives $+1,\ -1+\text{i}\sqrt{3},\ -1-\text{i}\sqrt{3}$ et -1.

Soit (E) l'ellipse de centre Ω passant par les points M_1 et M_2 ; son axe focal est l'axe des abscisses.

a. Trouver les foyers, les directrices associées et l'excentricité de (E).

b. Déterminer une équation cartésienne de (E) dans le repère $\left(\text{O} ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (E) et de l'axe des ordonnées. Tracer (E).

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{modulo } 2\pi \ \text{ et } \left(\overrightarrow{\text{BC}},\ \overrightarrow{\text{BA}}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ modulo } 2\pi.$$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1. Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de S_1.

b. Montrer que $\text{S}_1(\text{C}) = \text{I}$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.

2. Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a. Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2.

b. Soient M un point de (BI), M' son image par S_2. On suppose que M et M' sont distincts de I.

Montrer que les quatre points (A, M, I, M') sont cocycliques.

PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème n désigne *un entier naturel non nul.*
À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $]-1~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n.

1. Amiens-Créteil-Lille-Paris-Rouen-Versailles

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

I. : Étude des fonctions f_n

1. Soit h_n la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Étudier le sens de variation de h_n. En utilisant la valeur de $h_n(0)$,déterminer le signe de h_n sur $]-1 ; +\infty[$.

2. **a.** Pour tout x appartenant à $]-1 ; +\infty[$ vérifier que :

$$f_1'(x) = h_1(x),$$

et que pour tout n strictement supérieur à 1,

$$f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x).$$

b. On suppose n impair. Pour tout x appartenant à $]-1 ; +\infty[$ justifier que $f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe.
Dresser alors le tableau de variations de la fonction f_n, lorsque n est impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

c. On suppose n pair. Dressez de même le tableau de variations de f_n lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3. **a.** Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

b. Tracer ces deux courbes.

II. : Étude d'une suite
Dans cette partie, U désigne la suite de terme général U_n définie pour tout n entier naturel non nul par :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Étude de la convergence

a. Démontrer que :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

b. En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.

c. À l'aide de l'encadrement obtenu au **a.**, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait :

$$0 \leqslant U_n \leqslant \frac{1}{100}.$$

2. Calcul de U_1

a. En remarquant que pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$ on a

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

calculer

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\mathrm{d}x.$$

b. Calculer U_1 au moyen d'une intégration par parties.

3. Calcul de U_n

k=n Pour tout x de $[0\,;\,1]$ et pour tout $n \geqslant 2$,on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n \quad (1)$$

a. Démontrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} \quad [2].$$

b. En utilisant successivement les expressions (1) et (2) de $S_n(x)$,montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

c. En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

4. *Application*

Soit E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ vérifiant :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x).$$

Calculer U_2 et en déduire l'aire de E en cm^2.