Baccalauréat C Paris juin 1978

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans l'anneau $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ (dont les éléments sont notés $\dot{0}$, $\dot{1}$, $\dot{2}$, ..., $\dot{90}$),

1. discuter, suivant les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, l'équation

$$ax = \dot{0},$$

2. résoudre l'équation

$$x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Soit un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$ d'axes Ox, Oy.

1. Discuter, suivant la valeur du paramètre réel λ, la nature de la courbe C_λ dont l'équation dans le repère $\mathcal{R}$ est

$$\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 + \lambda^2 - \lambda = 0$$

2. Soit M_0 un point quelconque du plan. Discuter, suivant la position de M_0 le nombre et la nature des courbes C_λ passant par ce point ; dessiner les régions trouvées.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit m un paramètre pouvant prendre toute valeur réelle. Pour chaque valeur de m, on considère la fonction f_m de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_m(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m|+m}.$$

Partie A

1. Déterminer dans chacun des cas $m > 0$, $\quad m = 0$, $\quad m < 0$

a. l'ensemble $\mathcal{D}_m$ des points où f_m est définie,

b. l'ensemble $\mathcal{C}_m$ des points où f_m est continue,

c. l'ensemble $\mathcal{F}_m$ des points où f_m est dérivable.

2. Soit C_m la courbe représentative de f_m dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

Quelles sont les asymptotes de C_m ?

La courbe C_m admet-elle un centre de symétrie ?

Dessiner C_{-1}, C_0, C_1.

a. Montrer qu'il existe un unique point commun à toutes les courbes C_m correspondant aux m strictement positifs.

b. Montrer que, pour chaque m strictement positif, il existe une application affine transformant C_1 en C_m et C_{-1} en C_{-m}.

Partie B

Dans toute cette partie, m est strictement positif.

1. **a.** Calculer l'intégrale

$$\int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

où a est un réel vérifiant $0 < m \leqslant a$.

b. En déduire que, a étant fixé, cette intégrale tend vers une limite lorsque m tend vers 0 par valeurs positives.

2. Soit un entier $p \geqslant 2$.

a. Montrer que, pour chaque $m > 0$,

$$\int_0^m \left[2 - f_m(x)\right]^p\,\mathrm{d}x \leqslant 3^p m.$$

sans chercher à calculer l'intégrale.

b. Calculer

$$\int_m^a \left[2 - f_m(x)\right]^p\,\mathrm{d}x.$$

lorsque $0 < m \leqslant a$.

c. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{\substack{m \to 0 \\ m > 0}} \int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]^p\,\mathrm{d}x.$$

3. **a.** Montrer que, pour chaque x réel, $f_m(x)$ tend vers une limite finie $\lambda(x)$ lorsque m tend vers 0 par valeurs positives ; comparer les fonctions λ et f_0.

b. Existe-t-il un réel $m > 0$ tel qu'on ait :

$$\text{pour tout } x > 0, \quad 2 - f_m(x) < \frac{1}{10}.$$

c. Soit un réel $\epsilon > 0$. Existe-t-il un réel $\alpha > 0$ tel qu'on ait : pour tout m tel que $0 < m < \alpha$, pour tout $x \geqslant \epsilon$, $\quad 2 - f_m(x) < \epsilon$?

d. En déduire une autre démonstration du résultat trouvé au B 2. c.