Bac série C 1992 - Métropole gr. 1

Exercice 1 :

1. On cherche à résoudre : $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$

On remarque que 1 est solution évidente.
On peut donc écrire : $z^3 + z^2 + 2z - 4 = (z - 1)\left(z^2 + 2z + 4\right)$

Cherchons donc les racines du trinôme $X^2 + 2X + 4$:
$\Delta' = 1 - 4 = -3$
Et donc les racines : $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$.

L'ensemble des solutions de $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$ est $\left\{1, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\right\}$

__Remarque :__ on note que les affixes de l'exercice suivant reprennent les solutions trouvées, ce qui est toujours bon signe !

2.
a. De par la définition de (E), on sait que M_1 et M_2 sont 2 sommets de l'ellipse.

Et comme M_1 et M_2 sont sur (E), les sommes de leurs distances aux foyers sont égales et M_1 est sur l'axe focal, donc $F_1M_1 + F_2M_1 = 2\Omega M_1 = 4$

M_2 étant un sommet, $\left(\Omega F_1\right)^2 + \left(M_2F_1\right)^2 = 4$

Finalement on a $F_1\,(-2{,}0)$ et $F_2\,(0{,}0)$

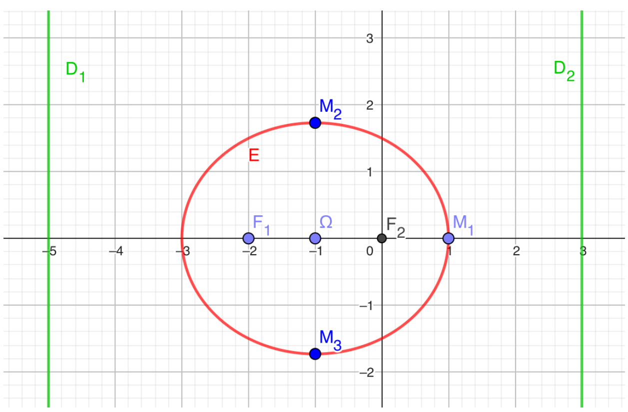
L'excentricité $e = \dfrac{1}{2}$. Elle est donnée par le rapport $e = \dfrac{\Omega F_2}{\Omega M_1}$

Et les directrices sont $D_1 : x = -5$ et $D_2 : x = 3$

b. Compte tenu de la position des sommets, on déduit :

l'équation de (E) : $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

c.



Exercice 2 :

1.

a. Par définition de AHB, l'angle $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}\right) = -\frac{\pi}{6}$

De plus, en calculant l'aire de ABC, on a $AB \times AC = AH \times BC$ ou $AB = AH \times \frac{BC}{AC}$.

$\boxed{\text{Finalement } S_1 \text{ est la similitude de centre } A\text{, d'angle } -\frac{\pi}{6} \text{ et de rapport } \frac{BC}{AC}}$

b. Par construction $ACIB$ est un rectangle. Et comme $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Et comme $IA = BC$, $\boxed{\text{on a bien } S_1(C) = I}$

On note que $(BC) = (BH)$ et avec les questions précédentes :

$\boxed{\text{On déduit que l'image de } (BC) \text{ par } S_1 \text{ est } (IB)}$

2.

a. Notons I' l'image de I par S_2. L'angle de S_2 étant $\frac{\pi}{2}$, les triangles ABC et AII' sont proportionnels.

Ce qui implique $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{II'}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et finalement $(II') = (IC)$

$\boxed{\text{Et donc l'image de } (BI) \text{ par } S_2 \text{ est } (IC)}$

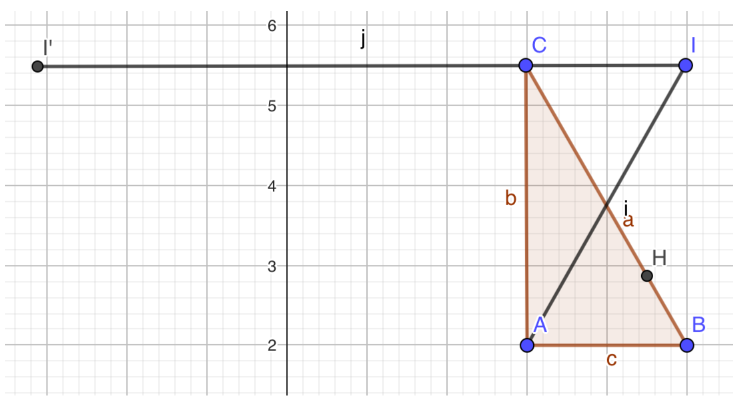
b. Par propriété des points cocycliques, il suffit de montrer que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}\right) = \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM'}\right)$

A partir de la question précédente, on sait que $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM'}\right) = -\frac{\pi}{3}$

Et d'après ce que nous avons vu dans les questions précédentes, MAM' est proportionnel à ABC et on a bien $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}\right) = \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IM'}\right)$.

$\boxed{\text{Ainsi } (M, I, A, M') \text{ sont cocycliques.}}$

Figure illustrative :



Problème :

Remarque : je souffre une nouvelle fois de mon incapacité de faire des tableaux de variations avec mes outils. Il faudrait que je trouve une solution plutôt que de le noter à chaque fois !

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]-1,+\infty[,\ h_n(x) = n\,ln\,(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$

h_n est bien dérivable sur son ensemble de définition et :

$\forall x \in]-1,+\infty[,\ h_n'(x) = \dfrac{n}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{n(1+x)+1}{(1+x)^2} > 0$

Donc h_n est strictement croissante et en notant que $h_n(0) = 0$,

On conclut que $\forall x \in]-1,0],\ h_n(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ h_n(x) \geqslant 0$.

2.

a. D'après la définition donnée, $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n(x) = x^n ln\,(1+x)$.

f_n est bien dérivable sur sur domaine de définition et

$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n'(x) = n\,x^{n-1} ln\,(1+x) + \dfrac{x^n}{1+x}$

Avec $n = 1$, on identifie bien $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_1'(x) = h_1(x)$

Plus généralement,

$\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n'(x) = n\,x^{n-1} ln\,(1+x) + \dfrac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\,ln\,(1+x) + \dfrac{x}{1+x}\right)$.

Ce qui justifie : $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n'(x) = x^{n-1} h_n(x)$

Remarque : vu la formulation, j'imagine que l'idée était de dériver f_1 dans un premier temps, mais je ne vois pas l'intérêt, car la formule générale s'applique bien à $n = 1$.

b. Soit n impair.

Si n est impair, $n-1$ est pair et donc $x^{n-1} \geqslant 0$.

Et d'après le résultat de la question précédente, on a bien $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_n'(x)$ et $h_n(x)$ sont de même signe.

$\forall x \in]-1,0],\ f_n$ est décroissante et $\forall x \in [0,+\infty[,\ f_n$ est croissante.

Je donne directement les limites cherchées, qui ne présentent aucune difficulté, le seul point d'attention est le signe de x^n quand x tend vers -1, ici négatif et positif dans la question suivante.

$\lim\limits_{x\to-1} f_n(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

c. Soit n pair.

On n'insiste pas non plus sur cette question, aucune difficulté, il faut juste noter que x^{n-1} est négatif entre -1 et 0 et x^n y est positif.

Sur $]-1,+\infty[,\ f_n$ est croissante, $\lim\limits_{x\to-1} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

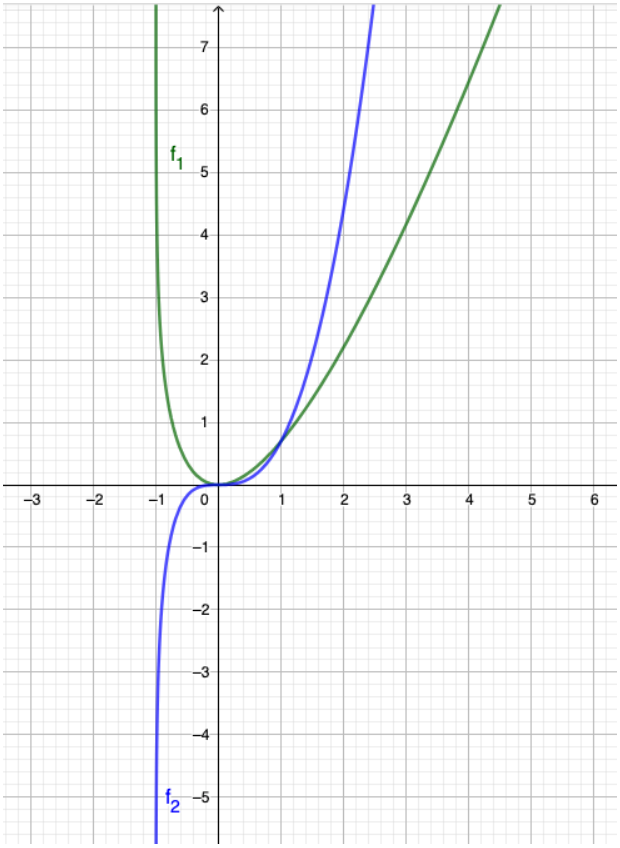
3.

a. Etudions $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f_1(x) - f_2(x) = x\,ln\,(1+x) - x^2 ln\,(1+x) = (1-x)\,x\,ln\,(1+x)$

Or, $\forall x \in]-1,+\infty[,\ x\,ln\,(1+x) \geqslant 0$ donc $f_1(x) - f_2(x)$ est du signe de $1-x$

Donc $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$ sur $]-1,1]$, avec intersections en 0 et 1 puis en dessous.

b.



Partie II

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \displaystyle\int_0^1 x^n ln\,(1+x)\,dx$

a. On a déjà $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[0,1\right],\ x^n ln\,(1+x) \geqslant 0$ et donc $U_n \geqslant 0$.

Par croissance de la fonction ln, on peut écrire : $\forall x \in \left[0,1\right],\ ln\,(1+x) \leqslant ln\,(2)$.

Ce qui implique, $\forall x \in \left[0,1\right],\ \displaystyle\int_0^1 x^n ln\,(1+x)\,dx \leqslant ln\,(2) \int_0^1 x^n dx = \frac{ln\,(2)}{n+1}$.

$\boxed{\text{Et donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{ln\,(2)}{n+1}}$

b. Par le théorème des gendarmes $\boxed{\text{on conclut immédiatement que } \left(U_n\right)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } 0.}$

c. Vérifions la monotonie de $\left(U_n\right)_{n\geqslant 1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1} ln\,(1+x)\,dx - \int_0^1 x^n ln\,(1+x)\,dx = \int_0^1 (x-1)\,x^n ln\,(1+x)\,dx$$

Or, sur $\left[0,1\right]$, $x^n \geqslant 0$, $ln\,(1+x) \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$, ce qui donne que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

Ainsi $\left(U_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, ce qui nous assurera que l'identification de n_0 implique que la majoration sera vraie pour tous les n suivants.

En reprenant la question précédente, on cherche $U_{n_0} \leqslant \dfrac{ln\,(2)}{n_0+1} \leqslant \dfrac{1}{100}$.

Ce qui donne $n_0 + 1 \geqslant 100 \times ln\,(2) = 69.3$.

Et donc avec $n_0 = 69$, $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant U_n \leqslant \dfrac{1}{100}$

2.

a. Commençons par vérifier l'indication donnée :

$$\forall x \in [0{,}1],\ \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

<u>Remarque :</u> ce résultat est évidemment vrai tant que x est différent de 1.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{x+1}dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + ln\,(x+1)\right]_0^1 = ln\,(2) - \frac{1}{2}$$

b. $U_1 = \displaystyle\int_0^1 x ln\,(1+x)\,dx$

Comme proposé, nous allons procéder à une intégration par partie :

$$\int_0^1 x ln\,(1+x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2 ln\,(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{1}{2}\left(ln\,(2) - ln\,(2) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Donc $U_1 = \dfrac{1}{4}$

3. $x \in [0{,}1]$ et $n \geqslant 2$. On pose $\forall x \in [0{,}1],\ S_n(x) = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n$

a. $\forall x \in [0{,}1],\ xS_n(x) = x - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{n+1}$

En additionnant les 2 (on remarque que les mêmes puissances de x apparaissent avec un signe opposé) :

$(1+x)S_n(x) = 1 + (-1)^n x^{n+1} = 1 - (-1)^{n+1}x^{n+1}$

Et donc : $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

b. On a donc l'égalité $\forall x \in [0{,}1],\ 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

On peut donc intégrer les 2 membres entre 0 et 1 :

En notant que $\displaystyle\int_0^1 (-1)^n x^n dx = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = ln\,(2)$

On arrive au résultat : $1 - \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{n+1} = ln\,(2) - (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

c. Remarquons que (intégration par parties) :

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = \left[x^{n+1} ln\,(1+x)\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n ln\,(1+x)\,dx = ln\,(2) - (n+1)U_n$$

En intégrant ce résultat dans l'égalité précédente,

$$1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}=ln(2)-(-1)^{n+1}\left(ln(2)-(n+1)U_n\right)$$

Ce qui implique directement (avec $(-1)^{n+1}=\frac{1}{(-1)^{n+1}}$) :

$$\boxed{U_n=\frac{ln(2)}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[ln(2)-\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]}$$

4. La surface à calculer est la différence entre U_1 et U_2.

En utilisant la formule précédente : $U_2=\frac{ln(2)}{3}+\frac{1}{3}\left(ln(2)-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(2ln(2)-\frac{5}{6}\right)$

$\boxed{\text{Et l'aire de } E \text{ est } \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\left(2ln(2)-\frac{5}{6}\right) \text{ soit environ } 0.07\ cm^2}$