Bac série C 1978 - Académie de Paris

Exercice 1 :

1. *<u>Rappel :</u> les nombres « pointés » représentent les classes d'équivalence au sein de $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, c'est à dire par exemple $\dot{1} = \{91k+1,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Donc résoudre $ax = \dot{0}$ revient à trouver, pour un a donné, les x tels que ax soit un multiple de 91.*

Commençons par remarquer que $91 = 13 \times 7$. Cela nous permet de distinguer 4 cas :

- <u>$a = \dot{0}$:</u>

a est déjà un multiple de 91 est donc tous les éléments de $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ vont être solution de l'équation.
(On notera S l'ensemble des solutions)

Si $a = \dot{0}$, $S = \mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$

- <u>$a = \dot{7}$:</u>

Tous les nombres congrus à un multiple de 13 sont solutions.
En effet, $\exists k \in \mathbb{Z},\ a = 91k + 7$. Comme le seul autre diviseur de 91 est 13, on cherche x de la forme $x = 91k' + 13n$, ainsi $ax = 91(91kk' + 13nk + 7k') + (13 \times 7)n$.

Donc si $a = \dot{7}$, $S = \left\{\dot{13}, \dot{26}, \dot{39}, \dot{52}, \dot{65}, \dot{78}\right\}$

<u>Remarque :</u> on note au passage que nous sommes dans un anneau qui n'est pas intègre, c'est à dire que la multiplication de 2 éléments non nuls peut faire 0.

- <u>$a = \dot{13}$:</u>

Par le même raisonnement qu'au dessus, on trouve que les solutions vont être les classes d'équivalence des multiples de 7

Ainsi pour $a = \dot{13}$, $S = \left\{\dot{7}, \dot{14}, \dot{21}, \dot{28}, \dot{35}, \dot{42}, \dot{49}, \dot{56}, \dot{63}, \dot{70}, \dot{77}, \dot{84}\right\}$

- Tous les autres cas :

En reprenant le cas du cas $a = \dot{7}$, on comprend qu'il n'y a pas de solution car le dernier terme de la multiplication ne sera jamais égal à 91.

Finalement, si $a \notin \left\{\dot{0}, \dot{7}, \dot{13}\right\}$, $S = \varnothing$.

2. On cherche à résoudre l'équation $x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$.

Si on reprend le calcul de multiplication explicité à la question précédente, on va pouvoir factoriser le trinôme « comme si » on était dans $\mathbb{R}$.
Et comme $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$, on peut écrire $x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \left(x - \dot{1}\right)\left(x + \dot{3}\right)$

Ainsi, on veut résoudre $\left(x - \dot{1}\right)\left(x + \dot{3}\right) = \dot{0}$, ce qui nous replace dans la situation de la 1ère question.

Nous allons à nouveau découper en différents cas :

- $x - \dot{1} = \dot{0}$ ou $x = \dot{1}$
- $x + \dot{3} = \dot{0}$ ou $x = \dot{88}$

Les 2 autres cas sont plus subtils car on va résoudre des systèmes présentant des congruences.

- <u>1er cas :</u>

$$\begin{cases} x - \dot{1} \equiv 0\,[7] \\ x + \dot{3} \equiv 0\,[13] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \dot{1}\,[7] \\ x \equiv \dot{10}\,[13] \end{cases}$$

Et $x = \dot{36}$
(Remarque : je vous encourage vivement à ne pas me croire sur parole et à vérifier les différentes classe solutions de chaque ligne et que le seul éléments commun est bien $\dot{36}$)

- 2ème cas :

$$\begin{cases} x - \dot{1} \equiv 0\,[13] \\ x + \dot{3} \equiv 0\,[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \dot{1}\,[13] \\ x \equiv \dot{4}\,[7] \end{cases}$$

Dans ce cas $x = \dot{53}$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left\{ \dot{1}, \dot{36}, \dot{53}, \dot{88} \right\}$

Exercice 2 :

Nous allons étudier l'équation $\lambda x^2 + (1-\lambda)\,y^2 + \lambda^2 - \lambda = 0$.

1. Commençons par regarder les cas particuliers :

- $\lambda = 0$:

L'équation devient $x^2 = 0$

Et C_0 est l'axe des abscisses.

- $\lambda = 1$:

L'équation devient cette fois $y^2 = 0$

Ce qui nous indique que C_1 est l'axe des ordonnées.

En réécrivant l'équation $\lambda x^2 + (1-\lambda)\,y^2 = \lambda - \lambda^2 = \lambda\,(1-\lambda)$.

En mettant de côté les cas déjà traités, nous pouvons écrire : $\dfrac{x^2}{1-\lambda} + \dfrac{y^2}{\lambda} = 1$.

Nous allons à nouveau distinguer plusieurs cas :

- $\lambda \in \left]0,1\right[$:

Dans ce cas, on a $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$. On reconnaît alors l'équation d'une ellipse.

Si $\lambda \in \left]0,1\right[$, C_λ est l'ellipse de centre O et de sommets $\left(\sqrt{1-\lambda},0\right)$, $\left(-\sqrt{1-\lambda},0\right)$, $(0,\lambda)$, $(0,-\lambda)$

- $\lambda < 0$:

Cette fois, nous avons $\lambda < 0$ et $1 - \lambda > 0$. Nous avons donc l'équation d'une ellipse.

Quand $\lambda < 0$, C_λ est l'hyperbole de centre O de sommets $\left(\sqrt{1-\lambda},0\right)$, $\left(-\sqrt{1-\lambda},0\right)$ et d'asymptotes $y = \pm\sqrt{\dfrac{-\lambda}{1-\lambda}}\,x$

- $\lambda > 1$:

Pour ce dernier cas, nous avons $\lambda > 0$ et $1 - \lambda > 0$. Nous avons à nouveau l'équation d'une ellipse, mais cette fois, les foyers sont sur l'axe des ordonnées !

Quand $\lambda > 1$, C_λ est l'hyperbole de centre O, de sommets $(0,\lambda)$ et $(0,-\lambda)$ et d'asymptotes $y = \pm\sqrt{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}x$.

2. Soit $M_0\left(x_0, y_0\right)$ un point du plan.
Ses coordonnées doivent donc vérifier : $\lambda x_0^2 + (1-\lambda)\,y_0^2 + \lambda^2 - \lambda = 0$

Le point $M_0\left(x_0, y_0\right)$ étant fixé, il faut considérer cette équation comme une équation du second degré en λ, que l'on réécrit :

$$\lambda^2 + \lambda\left(x_0^2 - y_0^2 - 1\right) + y_0^2 = 0.$$

$$\Delta_\lambda = \left(x_0^2 - y_0^2 - 1\right)^2 - 4y_0^2 = \left(x_0^2 - y_0^2 - 1 - 2y_0\right)\left(x_0^2 - y_0^2 - 1 + 2y_0\right)$$

Et finalement, nous devons étudier : $\Delta_\lambda = \left(x_0^2 - \left(y_0+1\right)^2\right)\left(x_0^2 - \left(y_0-1\right)^2\right)$

Les solutions vont donc dépendre de la position de M_0 par rapport aux droites :
$d_1 : y = x+1$, $d_2 = -x+1$, $d_3 = x-1$ et $d_4 = -x-1$

- <u>$\Delta_\lambda = 0$:</u>

Si M_0 est sur une des droites indiquées ci-dessus, M_0 est sur une seule C_λ.
<u>Attention :</u> sauf sur les intersections de ces droites, qui tombent sur les axes abscisses et des ordonnées, qui sont des cas particuliers pour $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$. *J'aurais donc dû commencer par ces cas.*

- <u>$\Delta_\lambda < 0$:</u>

En raisonnant géométriquement sur le plan, on trouve qu'il n'y a aucune solution quand on se situe à l'intérieur strict des bandeaux définis par les droites d_1 et d_3 d'une part et d_2 et d_4 d'autre part.
Il faut que les 2 membres du produit soient de signes opposés, ce qui correspond bien à cet ensemble. *Je laisse à chacun la rédaction détaillée du calcul si besoin.*

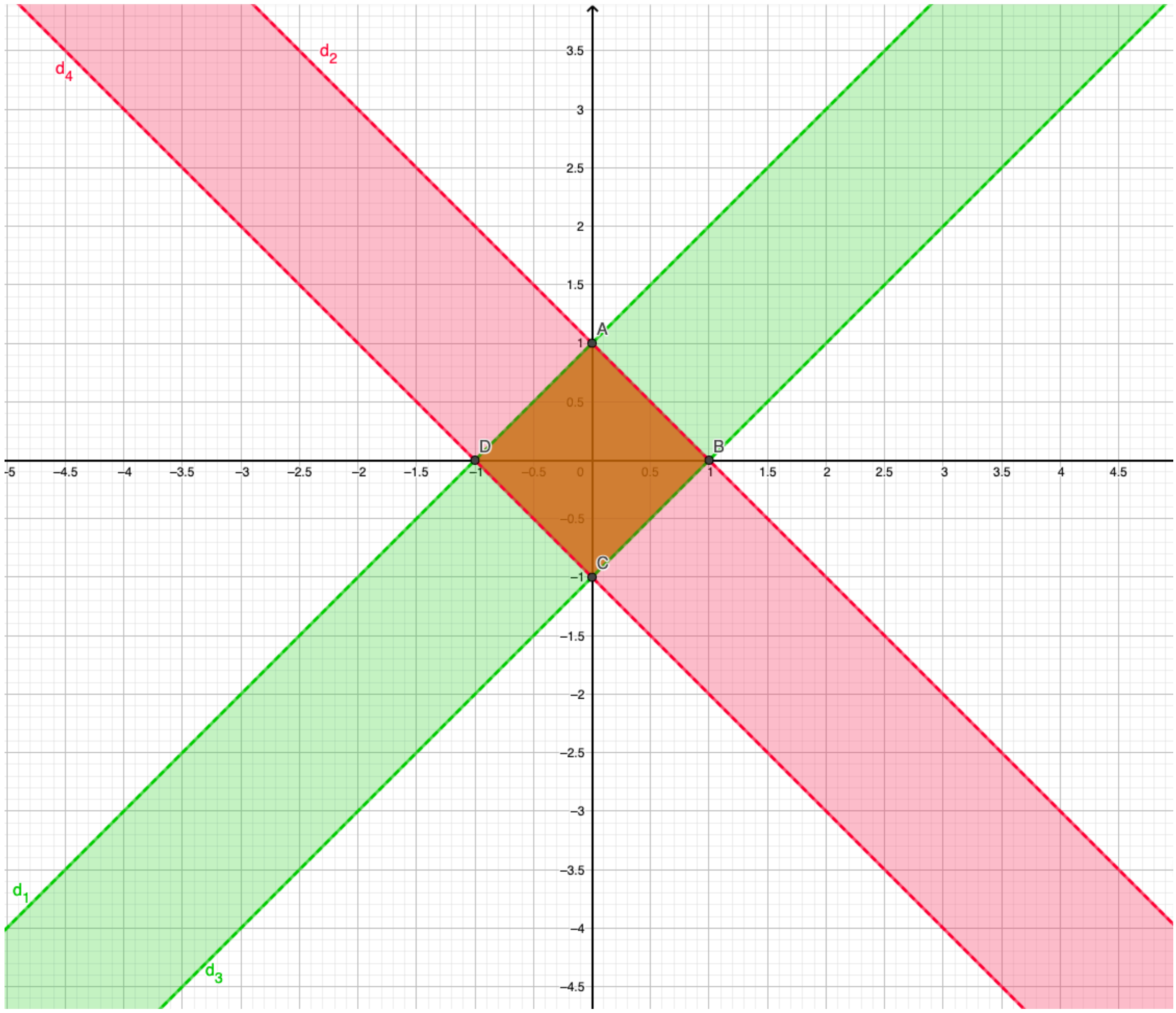
- <u>$\Delta_\lambda > 0$:</u>

Tous les reste du plan va donc donner 2 courbes C_λ pour chaque M_0.

- <u>Cas particuliers $\lambda = 1$ et $\lambda = 0$:</u>

On retrouve les cas particuliers des axes des abscisses et des ordonnées comme courbes C_0 et C_1

<u>Graphiquement :</u>
Les zones considérées sont « strictes », ie. Elles ne contiennent pas les droites de délimitations qui correspondent à d'autres ensembles de réponses.
Les bandes vertes et rouges sont les zones sans solution.
Le carré orange correspond à la zone dans laquelle par chaque point passent 2 ellipses.
La zone blanche correspond à la zone dans laquelle par chaque point passent 2 hyperboles.
Les droites sont les zones à solution unique, à l'exception des points A, B, C et D.



Problème :

Partie A :

Nous allons étudier la famille de fonctions $f_m(x) = \dfrac{2(x-m)}{|x-m|+m}$

1.

a. Le domaine de définition $\mathscr{D}_m$ de f_m dépend de la valeur de son dénominateur : f_m est définie en tout point où son dénominateur est non nul.

Procédons donc à la disjonction de cas proposée par l'énoncé :

- $\underline{m > 0 :}$

Dans ce cas, $|x-m|+m > 0$

Donc si $m > 0$, $\mathscr{D}_m = \mathbb{R}$

- $\underline{m = 0 :}$

$|x-m|+m = |x|$

Ce qui implique que si $m = 0$, $\mathscr{D}_m = \mathbb{R}^*$

- $\underline{m < 0 :}$

On doit résoudre $|x-m|+m = 0$ ou $|x-m| = |m|$.

Cette équation a 2 solutions, $x = 0$ ou $x = 2m$.

On conclut ce dernier cas si $m < 0$, $\mathscr{D}_m = \mathbb{R} \backslash \{2m, 0\}$

b. Les fonctions f_m sont continues sur leur ensemble de définition comme quotient de fonctions qui le sont.

Donc $\mathscr{C}_m = \mathscr{D}_m$

c. Le principe est le même pour la dérivation. La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donc f_m va être dérivable sauf aux valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule, auquel on ajoute $x = m$ pour laquelle la valeur absolue n'a pas de dérivée..

Finalement, on a : $\mathscr{F}_m = \mathscr{D}_m \backslash \{m\}$

2. Nous allons à nouveau pratiquer une disjonction de cas pour étudier les asymptotes.

Commençons pas le cas le plus simple.

- $\underline{m = 0}$:

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_0(x) = \dfrac{2x}{|x|}$, ce qui signifie :

$\forall x > 0,\ f_0(x) = 2$ et $\forall x < 0,\ f_0(x) = -2$

Ainsi, les asymptotes sont confondues avec la courbe C_0 : en $-\infty$, $y = -2$ et en $+\infty$, $y = 2$

- $\underline{m < 0}$:

D'après l'étude du domaine de définition, on doit étudier le comportement autour des points singuliers du domaine de définition, $x = 2m$ et $x = 0$.

Quand $x \to 2m_-$:

$x - m < 0$ et $|x - m| + m > 0$ et comme il n'y a pas de forme indéterminée, on trouve :

$\lim_{x \to 2m_-} f_m(x) = -\infty$

Quand $x \to 2m_+$:

$x - m < 0$ et $|x - m| + m < 0$ et ainsi : $\lim_{x \to 2m_+} f_m(x) = +\infty$

De la même façon :

Quand $x \to 0_-$:

$x - m > 0$ et $|x - m| + m < 0$ et comme il n'y a pas de forme indéterminée, on trouve :

$\lim_{x \to 2m_-} f_m(x) = -\infty$

Quand $x \to 2m_+$:

$x - m > 0$ et $|x - m| + m > 0$ et ainsi : $\lim_{x \to 2m_+} f_m(x) = +\infty$

Quand $m < 0$, C_m possède 2 asymptotes verticales $x = 2m$ et $x = 0$

Regardons maintenant le comportement en $\pm\infty$:

Quand $x \to -\infty$:

$|x - m| = -(x - m)$ et ainsi $f_m(x) = \dfrac{2(x - m)}{|x - m| + m} = -2\dfrac{x - m}{(x - m)\left(1 + \frac{m}{x - m}\right)} = -2\dfrac{1}{1 + \frac{m}{x - m}}$

Et donc $\lim_{x \to -\infty} f_m(x) = -2$

De la même façon, $\lim_{x \to +\infty} f_m(x) = 2$

Et on retrouve les asymptotes horizontales en $-\infty$, $y = -2$ et en $+\infty$, $y = 2$

- <u>Dernier cas : $m > 0$:</u>

Il faut uniquement étudier le comportement en $\pm\infty$. Les limites sont les mêmes que pour le le cas précédent.

La courbe admet également les asymptotes horizontales en $-\infty$, $y = -2$ et en $+\infty$, $y = 2$

<u>Remarque :</u> même si ça ne change pas les asymptotes, on note cependant (ce qu'on va voir sur la représentation graphique), qu'on arrive vers les limites par valeurs supérieures ou inférieures selon la valeur de m. Cette valeur modifiant la position de $1 + \dfrac{m}{x-m}$ par rapport à 1.

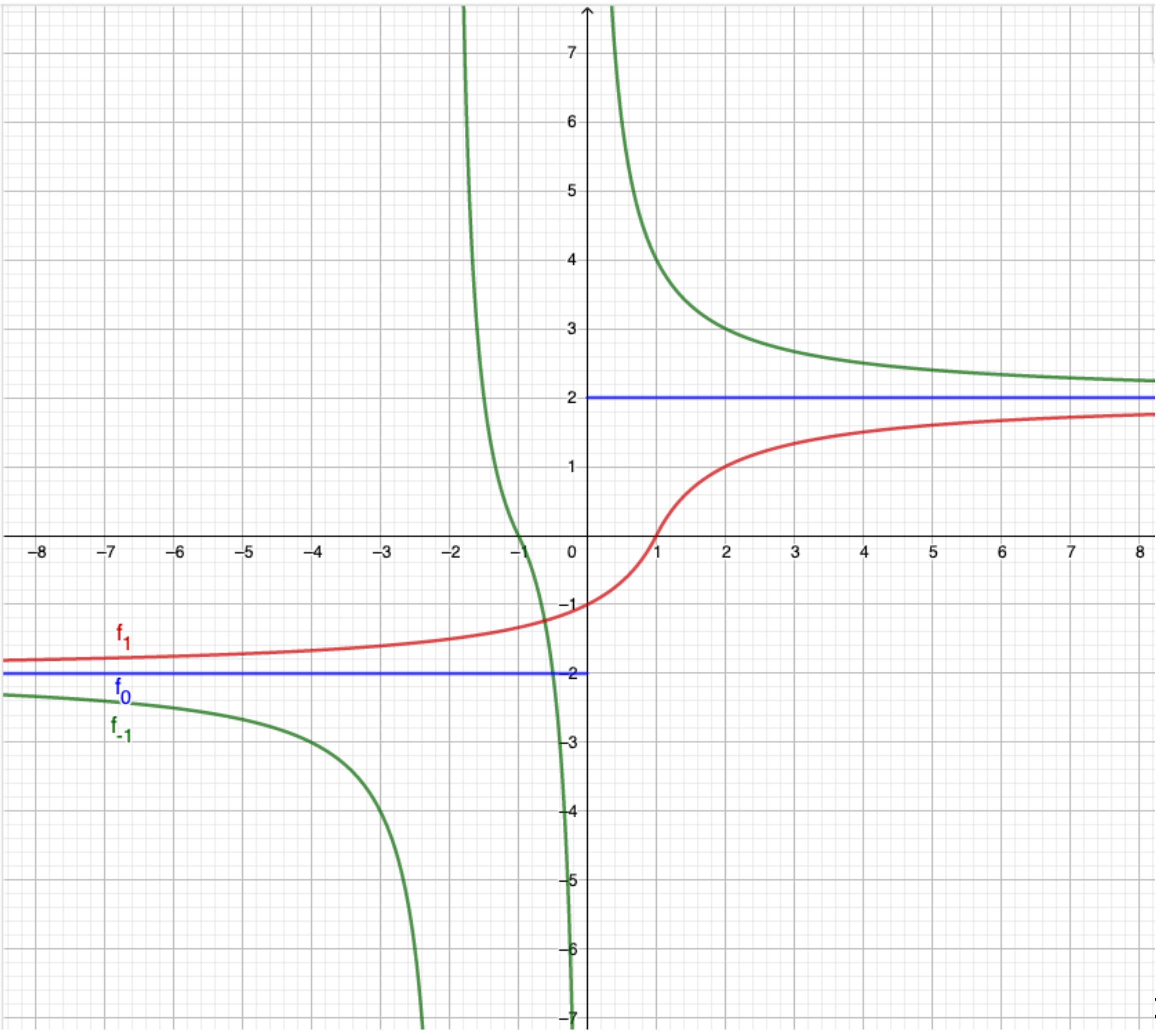
C_0 qui est composée de 2 demi-droites admet $O(0,0)$ comme centre de symétrie.

Pour $m \neq 0$, on a toujours $f_m(m) = 0$.
Comparons $f_m(m+x)$ et $f_m(m-x)$:
Nous allons traiter directement le cas générique, car les points singuliers identifiés sont symétriques par rapport à m : 0 et $2m$ pour $m < 0$ et donc si $m + x \in \mathcal{D}_m$, il en est de même pour $m - x$. *(Et heureusement vu ce qu'on chercher à montrer !)*

On obtient immédiatement : $f_m\,(m+x) = \dfrac{2x}{|x| + m} = -f_m\,(m-x)$

Et donc le point $O_m(m,0)$ est centre de symétrie pour C_m

Représentation graphique :



@gmail.com

a. Soit $m > 0, f_m(0) = -\dfrac{2m}{|-m| + m} = -\dfrac{2m}{2m} = -1.$

Donc pour tout $m > 0$, la courbe C_m passe par le point $(0, -1)$.

Considérons maintenant m et n de $\mathbb{R}$ tels que $0 < m < n$ et étudions la quantité $f_m(x) - f_n(x)$ pour tout $x \neq 0$.

Nous allons une nouvelle fois procéder à une disjonction de cas. Nous avons déjà justifier que ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}$, nous ne revenons pas dessus dans les différentes écritures des dénominateurs.

• $\underline{x < m:}$

$$f_m(x) - f_n(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m| + m} - \frac{2(x-n)}{|x-n| + n} = \frac{2(x-m)}{2m-x} - \frac{2(x-n)}{2n-x}$$
$$= -1 + \frac{x}{2m-x} + 1 - \frac{x}{2n-x} = \frac{x}{2m-x} - \frac{x}{2n-x} \neq 0$$

• $\underline{x > n:}$

$$f_m(x) - f_n(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m| + m} - \frac{2(x-n)}{|x-n| + n} = \frac{2n-2m}{x} \neq 0$$

• $\underline{m \leqslant x \leqslant n:}$

$$f_m(x) - f_n(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m| + m} - \frac{2(x-n)}{|x-n| + n} = \frac{2(x-m)}{x} - \frac{2(x-n)}{2n-x}$$
$$= \frac{2(x-m)(2n-x) - 2x(x-n)}{x(2n-x)} = \frac{2}{x(2n-x)}\big((x-m)(2n-x) - x(x-n)\big)$$

Or $\dfrac{2}{x(2n-x)} \neq 0$, donc nous allons étudier la quantité $(x-m)(2n-x) - x(x-n)$.

Comme $m \leqslant x \leqslant n$, $2n - x > 0$ et $x > 0$, $x - m \geqslant 0$ et $n - x \geqslant 0$, mais ne pouvant pas être égales à 0 en même temps.

Ce qui permet d'affirmer que $(x-m)(2n-x) - x(x-n) \neq 0$

On conclut que pour les m strictement positifs, les C_m ont un unique point commun en $(0, -1)$.

b. Soit m strictement positif.

$$f_m(x) = \frac{2(x-m)}{|x-m| + m} = \frac{2m\left(\frac{x}{m} - 1\right)}{\left|m\left(\frac{x}{m} - 1\right)\right| + m} = \frac{2m\left(\frac{x}{m} - 1\right)}{m\left(\left|\frac{x}{m} - 1\right| + 1\right)} = \frac{2\left(\frac{x}{m} - 1\right)}{\left(\left|\frac{x}{m} - 1\right| + 1\right)}$$

Donc $f_m(x) = f_1\left(\dfrac{x}{m}\right)$

De la même façon :

$$f_{-m}(x) = \frac{2(x+m)}{|x+m| - m} = \frac{2m\left(\frac{x}{m} + 1\right)}{m\left(\left|\frac{x}{m} + 1\right| - 1\right)} = \frac{2\left(\frac{x}{m} + 1\right)}{\left(\left|\frac{x}{m} + 1\right| - 1\right)}$$

Et ainsi : $f_{-m}(x) = f_{-1}\left(\dfrac{x}{m}\right)$

Partie B :

1.

a. $\int_0^a 2 - f_m(x)\,dx = \int_0^a 2dx - \int_0^m f_m(x)\,dx - \int_m^a f_m(x)\,dx = 2a - \int_0^m \frac{2(x-m)}{2m-x}dx - \int_m^a \frac{2(x-m)}{x}dx$

Et

$$\int_0^m \frac{2(x-m)}{2m-x}dx = 2\int_0^m \frac{2(x-m)}{4m-2x}dx = 2\int_0^m -1 + \frac{2m}{4m-2x}dx = -2m - 2m\left[ln\left|2x-4m\right|\right]_0^m$$
$$= -2m\left(1 + ln(2m) - ln(4m)\right) = -2m\left(1 - ln(2)\right)$$

Également

$$\int_m^a \frac{2(x-m)}{x}dx = \int_m^a 2 - \frac{2m}{x}dx = 2a - 2m - 2m\left[ln(x)\right]_m^a = 2a - 2m\left(1 - ln\left(\frac{a}{m}\right)\right)$$

Donc $\int_0^a 2dx - \int_0^m f_m(x)\,dx - \int_m^a f_m(x)\,dx = 2a + 2m\left(1 - ln(2)\right) - 2a + 2m\left(1 - ln\left(\frac{a}{m}\right)\right)$

$$= 2m\left(2 - ln\left(\frac{2a}{m}\right)\right) = 2m\left(2 + ln\left(\frac{m}{2a}\right)\right)$$

$$\boxed{\text{On conclut : } \int_0^a 2 - f_m(x)\,dx = 2m\left(2 + ln\left(\frac{m}{2a}\right)\right)}$$

b. Par croissance comparée, $\boxed{\text{on déduit } \lim_{m\to 0}\int_0^a 2 - f_m(x)\,dx = 0}$

2.

a. Nous allons étudier les variations de f_m.

<u>Remarque :</u> en tout état de cause, il aurait fallu le faire dès la question 2 de la partie A. Ca n'était pas indiqué et compte-tenu de la densité des questions, je me suis emballé et ai oublié cette partie !

Par hypothèse, $m > 0$. f_m est dérivable sauf pour $x = m$.

$\forall x < m,\ f_m(x) = \dfrac{2(x-m)}{2m-x}$ et $f'_m(x) = \dfrac{2(2m-x) + 2(x-m)}{(2m-x)^2} = \dfrac{2m}{(2m-x)^2} > 0$

D'autre part :

$\forall x > m,\ f_m(x) = \dfrac{2(x-m)}{x}$ et $f'_m(x) = \dfrac{2x - 2(x-m)}{x^2} = \dfrac{2m}{x^2} > 0$

(<u>Remarque :</u> on ne l'utilise pas spécialement, mais on remarque que $f'_m(x)$ tend vers $\frac{2}{m}$ quand x tend vers m par valeurs supérieures ou inférieures)

On conclut que pour $m > 0$, f_m est strictement croissante.

(<u>Remarque :</u> de la même façon on prouve que f_m est strictement décroissante quand $m < 0$)

Ce la nous permet de dire que $\forall x \in [0,m],\ f_m(x) \in [-1,2]$ et donc $0 \leqslant 2 - f_m(x) \leqslant 3$.

En majorant l'intégrale étudiée par l'intégrale d'une constante,

$$\boxed{\text{On conclut } \int_0^m \left[2 - f_m(x)\right]^p dx \leqslant 3^p m}$$

b. $\displaystyle\int_m^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = \int_m^a \left[2 - \frac{2(x-m)}{x}\right]^p dx = \int_m^a \left[\frac{2m}{x}\right]^p dx = (2m)^p \left[-\frac{1}{(p-1)\,x^{p-1}}\right]_m^a$

$$\boxed{\text{Et } \int_m^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = \frac{(2m)^p}{p-1}\left(\frac{1}{m^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}\right)}$$

c. En utilisation la relation de Chasles, on peut écrire :

$$\int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = \int_0^m \left[2 - f_m(x)\right]^p dx + \int_m^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx$$

Or, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^m \left[2 - f_m(x)\right]^p dx \leqslant 3^p m$ et p étant fixé, $\lim\limits_{m \to 0} 3^p m = 0$

Et par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{m \to 0} \displaystyle\int_0^m \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = 0$

En reprenant la question précédente,

$$\int_m^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = \frac{(2m)^p}{p-1}\left(\frac{1}{m^{p-1}} - \frac{1}{a^{p-1}}\right) = \frac{2^p}{p-1}\left(m - \frac{m^p}{a^{p-1}}\right)$$

Cette écriture nous permet d'écrire que $\lim\limits_{m \to 0} \displaystyle\int_m^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = 0$

$$\boxed{\text{Et finalement } \lim_{m \to 0} \int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = 0}$$

3. On a toujours $m > 0$

a. Considérons $x \in \mathbb{R}^* : f_m(x) = \dfrac{2(x-m)}{|x-m| + m} = \dfrac{2x\left(1 - \frac{m}{x}\right)}{|x|\left|1 - \frac{m}{x}\right| + m}$

Ce qui nous donne $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \lim\limits_{m \to 0} f_m(x) = \dfrac{2x}{|x|}$.

De plus, on a déjà vu que $\forall m > 0,\ f_m(0) = -1$

$$\boxed{\text{On pose donc } \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \lambda(x) = \frac{2x}{|x|} = f_0(x) \text{ et } \lambda(0) = -1}$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2 - f_m(x) = 2 - \dfrac{2(x-m)}{|x-m| + m}$

Distinguons une nouvelle fois les différents cas :

- <u>$x > m$:</u>

$$2 - f_m(x) = 2 - \frac{2(x-m)}{|x-m| + m} = \frac{2x - 2(x-m)}{x} = \frac{2m}{x}$$

Donc $2 - f_m(x) < \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow \dfrac{2m}{x} < \dfrac{1}{10}$

Ce qui nous donne donc $x > 20m$

$$\boxed{\text{On constate donc que } 2 - f_m(x) < \frac{1}{10} \text{ et donc on ne peut pas trouver un } m \text{ tel que l'inégalité soit valable pour tout } x}$$

©antoine.remond.maths@gmail.com

Il n'est donc pas nécessaire de traiter l'autre cas.

c. Dans les questions précédentes nous avons déjà vu que :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant 2 - f_m(x) \leqslant 3$
$\forall m > 0,\ f_m$ est croissante et donc $2 - f_m$ est décroissante.
Ainsi, $\forall x \geqslant \epsilon,\ 2 - f_m(x) \leqslant 2 - f_m(\epsilon)$

- $\underline{x > m}$:

$2 - f_m(x) = \dfrac{2m}{x}$ et donc $\forall x \geqslant \epsilon,\ \dfrac{2m}{x} \leqslant \dfrac{2m}{\epsilon}$

Et donc on va pouvoir majorer : $\dfrac{2m}{x} \leqslant \dfrac{2m}{\epsilon} < \epsilon$

Et donc avec $\alpha = \dfrac{\epsilon^2}{2}$, on a bien $0 < m < \alpha$ et $\forall x \geqslant \epsilon,\ 2 - f_m(x) < \epsilon$

- $\underline{x < m}$:

En utilisant la décroissance de $2 - f_m$, on déduit de que le α qui pourra être exhibé sera plus grand que dans le cas précédent.

$$\boxed{\text{Finalement, avec } \alpha = \frac{\epsilon^2}{2}, \text{ on a bien } 0 < m < \alpha \text{ et } \forall x \geqslant \epsilon,\ 2 - f_m(x) < \epsilon}$$

d. En prenant $0 < m < \alpha$, on sait que $\forall x \geqslant \epsilon,\ 2 - f_m(x) < \epsilon \Rightarrow \left[2 - f_m(x)\right]^p < \epsilon^p$.
On peut intégrer cette inégalité : $0 \leqslant \displaystyle\int_\epsilon^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx < \int_\epsilon^a \epsilon^p dx \leqslant a\epsilon^p$.

Or d'après la question précédente, on a l'équivalence de cette inégalité avec :
$0 \leqslant \displaystyle\int_{\sqrt{2m}}^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx \leqslant a\epsilon^p$

$$\boxed{\text{Ainsi on retrouve bien le résultat de B.2.c } \lim_{m \to 0} \int_0^a \left[2 - f_m(x)\right]^p dx = 0.}$$

__Remarque :__ j'ai un peu triché pour répondre à cette question car on n'a pas tout à fait équivalence (ce qui en maths veut dire qu'on n'a pas tout court) car on a travaillé avec des inégalités strictes pour exhiber α. Ces inégalités strictes n'apportant pas grand chose, on peut considérer que moralement on a bien équivalence.