*<u>Remarque :</u> dès qu'on doit étudier le comportement d'une fonction (voir d'une suite définie à partir d'une fonction), il est intéressant de regarder le graphique de la fonction considérée à la calculatrice ou Géogébra !*

# Exercice 137 :

Déterminer, en utilisant un encadrement, la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor$$

## Solution :

Par définition de la partie entière, on trouve l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n} \leqslant\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n}+1\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}+\frac{1}{n}$$

Or $\displaystyle \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{n^3}\times\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \frac{1}{n^3}\times\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)$

Donc $\displaystyle \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2} \leqslant\ u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k^2}{n} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{n}$

$$\boxed{\text{Et on conclut } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}}$$

# Exercice 138 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $N_n$ le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n$ ($N_n$ vaut $1$ si $1 \leqslant n \leqslant 9$, $2$ si $10 \leqslant n \leqslant 99$ …).

Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n>1}$ définie par $\forall n > 1,\ u_n = \dfrac{N_n}{ln\,(n)}$.

On exprimera $N_n$ à l'aide des fonctions parties entières et logarithme décimal.

## Solution :

$$\forall n > 1,\ u_n = \frac{N_n}{ln\,(n)} = \frac{N_n}{ln\,(10)\,log\,(n)}$$

Par ailleurs, on sait que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $10^{N_n-1} \leqslant n \leqslant 10^{N_n}$ ce qui implique $log\left(10^{N_n-1}\right) \leqslant log\,(n) \leqslant log\left(10^{N_n}\right)$ (par croissance du logarithme).

Ou encore, $N_n - 1 \leqslant log\,(n) \leqslant N_n$.

Et donc $\displaystyle 1 \leqslant \frac{N_n}{log\,(n)} \leqslant \frac{N_n}{N_n-1}$

Or, quand $n \to +\infty$, $N_n \to +\infty$ et donc $\dfrac{N_n}{log\,(n)} \to 1$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{ln\,(10)}}$$

# Exercice 139 :

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$

## Solution :

On peut encadrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

On obtient immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.

D'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \frac{n}{n+\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ dont la limite en $+\infty$ est également $1$.

Et donc par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

# Exercice 140 :

*Flocon de Koch*

On construit une suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$ de polygones de la manière suivante. On prend pour $F_1$ un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur $1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on passe de $F_n$ à $F_{n+1}$ en partageant chaque segment du pourtour de $F_n$ en 3 segments égaux, puis en substituant au segment central une réunion de 2 segments égaux formant avec le segment supprimé un triangle équilatéral situé vers l'extérieur.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient $c_n$, $l_n$, $p_n$ et $a_n$ le nombre de côtés, la longueur des côtés, le périmètre et l'air de $F_n$.

a) Dessiner $F_1$, $F_2$ et $F_3$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $c_n$, $l_n$ et $p_n$ en fonction de $n$. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\geqslant 1}$.

c) Calculer $a_1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$. Montrer que $(p_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite finie que l'on calculera.

## Solution :

a) Dessin du flocon de Koch pour les 6 premières étapes (je n'en suis pas l'auteur) : https://www.geogebra.org/m/dMTAysVH.

b) Commençons par déterminer $c_n$ :

$c_1 = 3$, c'est l'hypothèse de départ de la construction.

Ensuite, chaque côté du triangle est divisé en 4 « sous-segments » et $c_2 = 12$.

On recommence le même procédé et $c_3 = 4 \times 4 \times 3 = 48 = 3 \times 4^2$

En reproduisant l'opération $n-1$ fois, on trouve $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = 3 \times 4^{n-1}.}$

Déterminons maintenant $l_n$ :

$l_1 = 1$ par construction.

On construit ensuite $F_2$ en divisant le côté en 3, donc $l_2 = \dfrac{1}{3}$.

En reproduisant, $l_3 = \dfrac{1}{3^2}$.

Et comme pour $c_n$, on réitère le précédé $n-1$ fois, ce qui donne $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ l_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}.}$

Finalement $p_n$ :
On sait que $p_n = c_n \times l_n$.

Cela donne $p_n = 3 \times \dfrac{4^{n-1}}{3^{n-1}}$.

$$\boxed{\text{Finalement } p_n = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \text{ et donc } \lim_{n \to +\infty} p_n = +\infty.}$$

c) On note $h_n$ la hauteur des triangles équilatéraux « ajoutés » à l'étape $n$.

$h_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (*Remarque : si on ne connaît pas la formule par cœur, on la retrouve très rapidement avec Pythagore*).

$$\boxed{\text{Et } a_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.}$$

Pour passer de $F_n$ à $F_{n+1}$, on ajoute un triangle équilatéral sur chaque arête, donc $c_n$ triangles, dont le côté mesure $l_{n+1}$.

On calcule $h_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} l_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \times 3^n}$.

Et ainsi, l'aire « ajoutée » est donc $3 \times 4^{n-1} \times \dfrac{1}{3^n} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4 \times 3^n} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

$$\boxed{\text{Finalement } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n.}$$

De la formule précédente on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k$

Et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{9} \times 9 \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{5} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{5}$$

$$\boxed{\text{On conclut } \lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{4\sqrt{3}}{5}.}$$

Ainsi le flocon de Koch a un périmètre qui tend vers $+\infty$ alors que son aire reste finie !

©antoine.remond.maths@gmail.com