Exercice 237 :

Calculer pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x t^2 ln(t)\, dt,\ \int_1^x \left(ln(t)\right)^2 dt$$

Solution :

$$\int_1^x t^2 ln(t)\, dt = \frac{1}{3}\left[t^3 ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{3}\int_1^x \frac{t^3}{t} dt = \frac{1}{3}x^3 ln(x) - \frac{1}{9}\left[t^2\right]_1^x = \frac{1}{3}x^3 ln(x) - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{9}$$

<u>Remarque :</u> résultat à connaître, une primitive de la fonction ln est $x \mapsto x ln(x) - x$.

$$\int_1^x \left(ln(t)\right)^2 dt = \left[ln(t)\left(t ln(t) - t\right)\right]_1^x - \int_1^x ln(t) - 1 dt$$

$$= x\left(ln(x)\right)^2 - x ln(x) - \left[t ln(t) - t - t\right]_1^x = x\left(ln(x)\right)^2 - 2x ln(x) + 2x - 2$$

Exercice 238 :

Pour $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\displaystyle\int_1^x t^n ln(t)\, dt$.

Solution :

$$\int_1^x t^n ln(t)\, dt = \frac{1}{n+1}\left[t^{n+1} ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n dt = \frac{x^{n+1} ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\left[t^{n+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{x^{n+1} ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Exercice 239 :

Calculer $\displaystyle\int_0^x t^2 sin(t)\, dt$

Plus généralement, proposer une méthode pour les intégrales de fonctions de type $x \mapsto p(x) sin(x)$ ou $x \mapsto p(x) cos(x)$ où p est un polynôme.

Solution :

$$\int_0^x t^2 sin(t)\, dt = \left[-t^2 cos(t)\right]_0^x + 2\int_0^x t cos(t)\, dt = -x^2 cos(x) + 2\left[t sin(t)\right]_0^x - 2\int_0^x sin(t)\, dt$$

$$= -x^2 cos(x) + 2x sin(x) + 2\left[cos(t)\right]_0^x = -x^2 cos(x) + 2x sin(x) + 2 cos(x) - 2$$

On comprends le principe : pour les fonctions de type $x \mapsto p(x) sin(x)$ ou $x \mapsto p(x) cos(x)$ où p est un polynôme, on primitive la fonction trigonométrique (qui reste tout le temps une fonction trigonométrique) et on dérive le polynôme jusqu'à arriver à une constante.

Exercice 240 :

Calculer $\displaystyle\int_0^x t e^t dt,\ \int_0^x t^2 e^t dt$

Plus généralement, proposer une méthode pour les intégrales de fonctions de type $x \mapsto p(x) e^x$ où p est un polynôme.

©antoine.remond.maths@gmail.com

Solution :

$\int_0^x te^t dt = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - \left[e^t\right]_0^x = xe^x - e^x + 1$

$\int_0^x t^2 e^t dt = \left[t^2 e^t\right]_0^x - 2\int_0^x te^t dt = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x + 1\right) = e^x\left(x^2 - 2x - 1\right) - 2$ (on utilise le résultat précédent pour la 2ème partie).

Plus généralement, pour les fonctions $x \mapsto p(x)e^x$, on va dériver le polynôme et primitive l'exponentielle.

Exercice 241 :

Calculer, pour a et b deux réels non nuls et x un réel : $f(x) = \int_0^x e^{at} cos\left(bt\right) dt$

On intégrera deux fois par parties.

Solution :

$f(x) = \int_0^x e^{at} cos\left(bt\right) dt = \frac{1}{b}\left[e^{at} sin\left(bt\right)\right]_0^x - \frac{a}{b}\int_0^x e^{at} sin\left(bt\right) dt$

$= \frac{1}{b}e^{ax} sin\left(bx\right) + \frac{a}{b^2}\left[e^{at} cos\left(bt\right)\right]_0^x - \frac{a^2}{b^2}\int_0^x e^{at} cos\left(bt\right) dt$

$= \frac{1}{b}e^{ax} sin\left(bx\right) + \frac{a}{b^2}e^{ax} cos\left(bx\right) - \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} f(x)$

Donc $\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) f(x) = \frac{1}{b}e^{ax} sin\left(bx\right) + \frac{a}{b^2}e^{ax} cos\left(bx\right) - \frac{a}{b^2}$

Ou $\left(b^2 + a^2\right) f(x) = be^{ax} sin\left(bx\right) + ae^{ax} cos\left(bx\right) - a$

$\boxed{\text{Finalement } f(x) = \frac{1}{b^2 + a^2}\left(be^{ax} sin\left(bx\right) + ae^{ax} cos\left(bx\right) - a\right)}$

Exercice 242 :

Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$ on pose $B\left(p, q\right) = \int_0^1 x^{p-1}\left(1 - x\right)^{q-1} dx$.

a) On suppose que $q \geqslant p \geqslant 1$. Exprimer $B\left(p, q\right)$ en fonction de $B\left(p - 1, q + 1\right)$, p et q.
b) Exprimer $B\left(p, q\right)$ en fonction de p et q d'abord si $q \geqslant p$, puis si $p \geqslant q$.

Solution :

a) $B\left(p, q\right) = \int_0^1 x^{p-1}\left(1 - x\right)^{q-1} dx = \frac{-1}{q}\left[x^{p-1}\left(1 - x\right)^q\right]_0^1 + \frac{p-1}{q}\int_0^1 x^{p-2}\left(1 - x\right)^q dx$

$\boxed{\text{Et donc } B\left(p, q\right) = \frac{p-1}{q} B\left(p - 1, q + 1\right)}$

b) <u>Cas $q \geqslant p$:</u>
En repartant de la question précédente, on trouve :

$B\left(p, q\right) = \frac{p-1}{q} B\left(p - 1, q + 1\right) = \frac{\left(p-1\right)\left(p-2\right)}{q\left(q+1\right)} B\left(p - 2, q + 2\right)$

Et ainsi jusqu'à 1 :

$$B\left(p,q\right) = \frac{\left(p-1\right)!}{q\left(q+1\right)\ldots\left(q+p-2\right)}B\left(1,q+p-1\right) = \frac{\left(p-1\right)!}{q\left(q+1\right)\ldots\left(q+p-2\right)}\int_0^1 (1-x)^{q+p-2}\,dx$$

$$= \frac{\left(p-1\right)!}{q\left(q+1\right)\ldots\left(q+p-2\right)\left(q+p-1\right)}\left[(1-x)^{q+p-1}\right]_0^1 = \frac{\left(p-1\right)!}{q\left(q+1\right)\ldots\left(q+p-2\right)\left(q+p-1\right)}$$

Et finalement, en réécrivant le dénominateur :

$$\boxed{B\left(p,q\right) = \frac{\left(p-1\right)!\left(q-1\right)!}{\left(q+p-1\right)!}}$$

<u>Cas $p \geqslant q$:</u>
Eh bien, le résultat est symétrique, donc reste le même. L'ordre n'est pas entré en jeu dans les calculs précédents.
Si on veut s'amuser, on fait un changement de variable $X = 1-x$, qui amène un « $-$ » avec $dX = -\,dx$, mais inverse les bornes et on a donc un autre « $-$ » pour les remettre dans le bon sens !

Exercice 243 :

Lemme de Riemann-Lebesgue
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application définie sur $\left[a,b\right]$, à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, démontrer que $\left|\int_a^b f(t)\,sin\,(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|f(a)\right| + \left|f\left(b\right)\right| + \int_a^b \left|f'(t)\right|\,dt\right)$

En déduire que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,sin\,(\lambda t)\,dt = 0$

Solution :

On va procéder à une intégration par partie *(on y pense tout de suite (enfin ou pas tout de suite, mais ça doit venir) en voyant les valeurs de f aux bornes considérées et une intégrale sur f' + un réflexe qu'on doit avoir/acquérir sur les fonctions trigonométriques, on en reparle en dessous !).*

Pour cette intégration par partie, on va dériver f (les propriétés données à cette fonction en hypothèse nous permettent de le faire sans souci) et donc intégrer la fonction $x \mapsto sin\,(\lambda x)$, dont une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{\lambda}cos\,(\lambda x)$. *(Attention à ne pas oublier le « - » dans la primitive. On voit apparaitre le $\frac{1}{\lambda}$ qui nous encourage dans cette voie).*

On a donc : $\int_a^b f(t)\,sin\,(\lambda t)\,dt = \left[-\frac{1}{\lambda}f(t)\,cos\,(\lambda t)\right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{\lambda}cos\,(\lambda t)f'(t)\,dt$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(f(a)\,cos\,(\lambda a) - f\left(b\right)cos\left(\lambda b\right)\right) + \frac{1}{\lambda}\int_a^b cos\,(\lambda t)f'(t)\,dt$$

En prenant la valeur absolue de cette égalité et en utilisant l'inégalité triangulaire.
R*appels :*

- *Pour les soustractions, on peut utiliser « brutalement »* $\left|a-b\right| = \left|a+\left(-b\right)\right| \leqslant \left|a\right| + \left|b\right|$. *C'est souvent (et malheureusement) trop large cependant*
- *On va utiliser la propriété « de base » des fonctions trigonométriques (ici pour cosinus, mais aussi vrai évidemment pour sinus) :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|cos\,(x)\right| \leqslant 1$
- *L'inégalité triangulaire s'applique sur les intégrales (qu'on peut voir comme la limite d'une somme d'aires de rectangles)*

©antoine.remond.maths@gmail.com

$$\left|\int_a^b f(t)\,sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|f(a)\,cos(\lambda a)\right| + \left|f(b)\,cos(\lambda b)\right| + \left|\int_a^b cos(\lambda t)\,f'(t)\,dt\right|\right) \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|f(a)\right| + \left|f(b)\right| + \int_a^b \left|cos(\lambda t)\,f'(t)\right|\,dt\right)$$

Et finalement :

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\left|f(a)\right| + \left|f(b)\right| + \int_a^b \left|f'(t)\right|\,dt\right)}$$

La 2ème question est immédiate, les 3 éléments de la somme étant indépendants de λ et on conclut bien

que $\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,sin(\lambda t)\,dt = 0.}$

©antoine.remond.maths@gmail.com