Dans ce chapitre, sauf indication contraire, la fonction φ_α fait référence à $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

Exercice 199 :

a) Pour quels nombres réels α la fonction φ_α est-elle convexe sur $\mathbb{R}_+^*$?
b) En déduire que si $\alpha > 1,\ \forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ (1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$

Solution :

a) La méthode la plus simple pour étudier la convexité de φ_α semble être d'étudier le signe de sa dérivé seconde (on considère $\alpha \neq 1$). <u>Rappel :</u> *une fonction C^2 est convexe ssi sa dérivée seconde est positive.*

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $\varphi_\alpha''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

Donc le signe de $\varphi_\alpha''(x)$ est donné par le signe de $\alpha(\alpha-1)$.

$\boxed{\text{Et donc } \varphi_\alpha \text{ est convexe pour } \alpha \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]1,+\infty\right[}$

b) Par caractérisation des fonctions convexes, leur courbe représentative se trouve « au-dessus » de leur tangente.

Dans le cas de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, qui est définie sur $\left]-1,+\infty\right[$, cela est vrai en particulier pour la tangente en 0 (d'après la question précédente, $\alpha > 1$ nous assure de la convexité).

$\boxed{\text{Et donc si } \alpha > 1,\ \forall x \in \left]-1,+\infty\right[,\ (1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x}$

Exercice 200 :

Déterminer la limite de $\dfrac{x^\alpha - 1}{x - 1}$ quand x tend vers 1

Solution :

Si x tend vers 1, on reconnaît la limite définissant la dérivée de φ_α.

$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha - 1}{x-1} = \alpha}$

Exercice 201 :

Soit α dans $\mathbb{R}$. Pour n de $\mathbb{N}$ calculer la dérivée n-ième de φ_α.

Solution :

<u>$n = 1$:</u> $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
<u>$n = 2$:</u> $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi_\alpha''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$

$\boxed{\underline{\text{Au rang } n :}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}$

<u>Remarque :</u> *cet exercice est une manipulation « basique » de la dérivée des fonctions puissances, je laisse à chacun le soin de la rédaction propre de la récurrence et la mise en exergue des cas particulier, comme par exemple $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha < n$.*

Exercice 202 :

Équations différentielles des fonctions puissances

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. En imitant éventuellement la démonstration du théorème 4 de 6.4.2, démontrer que les 2 conditions suivantes sont équivalentes :

- f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{\alpha}{x} f(x)$
- Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = Cx^\alpha$

Solution :

$(\Leftarrow)$

Ce sens est assez immédiat.

Si $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = Cx^\alpha$, on a alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \alpha C x^{\alpha-1} = \dfrac{\alpha}{x} C x^\alpha = \dfrac{\alpha}{x} f(x)$

$(\Rightarrow)$

Utilisons comme proposé le même raisonnement que celle présentée dans le paragraphe 6.4.2.

Les fonctions puissances ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et nous allons donc étudier la fonction g définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = f(x)\, x^{-\alpha}$.

g est bien dérivable comme produit de fonctions dérivables et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = f'(x)\, x^{-\alpha} - \alpha f(x)\, x^{-\alpha-1} = x^{-\alpha}\left(f'(x) - \frac{\alpha}{x} f(x)\right)$$

Et par hypothèse, on a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = 0$.

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = C$

Ce qui implique bien que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = Cx^\alpha$.

Par double implication, on conclut que les 2 propositions sont équivalentes.