Dans ce chapitre, sauf indication contraire, la fonction φ_α fait référence à $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

Exercice 203 :

La suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

Exprimer u_n en fonction de u_0 et n, puis déterminer la limite de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$

Solution :

Regardons les premiers rangs :

$u_1 = \sqrt{u_0}$

$u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt{\sqrt{u_0}} = \sqrt[4]{u_0}$

Ces résultats initialise la proposition : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt[2n]{u_0}$.

Étudions l'hérédité avec le rang $n+1$:

$u_{n+1} = \sqrt{u_n} = \sqrt{\sqrt[2n]{u_0}} = \sqrt[2(n+1)]{u_0}$.

$\boxed{\text{Ce qui confirme la proposition et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt[2n]{u_0}.}$

Le sens de variation de la suite va dépendre de la position de u_0 par rapport à 1. Je laisse le soin à chacun de rédiger la récurrence rapide et on trouve :

Si $u_0 < 1$, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 1.

Si $u_0 > 1$, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 1.

Si $u_0 = 1$, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est constante.

$\boxed{\text{Dans les 3 cas, la suite } \left(u_n\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge vers le point fixe de la fonction racine carrée : } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

Exercice 204 :

Soit a un élément de $\mathbb{R}_+^*$. On note ψ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_a(x) = a^x = exp\left(x ln(a)\right)$.

a) Calculer la dérivée de ψ_a

b) Déterminer les limites de $\psi_a(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. On discutera de la position de a par rapport à 1.

c) Tracer les graphes de ψ_2 et $\psi_{\frac{1}{2}}$

Solution :

a) ψ_a est bien dérivable comme composée de fonction qui le sont sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{On a donc } \forall x \in \mathbb{R},\ \psi'_a(x) = ln(a)\, exp\left(x ln(a)\right) = ln(a)\, a^x}$

b) On comprend que c'est le signe de $ln(a)$ qui détermine les variations de ψ_a et donc ses limites.

Si $a = 1$, ψ_a est constante égale à 1.

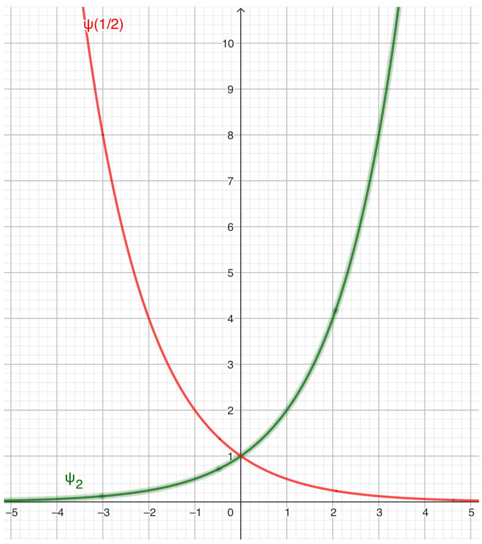
Si $\underline{a < 1}$, $ln(a) < 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \psi_a(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \psi_a(x) = +\infty}$$

Si $\underline{a > 1}$, $ln(a) > 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \psi_a(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \psi_a(x) = 0}$$

c)



Exercice 205 :

Soit $a > 0$. Déterminer la limite de $\dfrac{a^x - 1}{x}$ quand x tend vers 0

Solution :

En reprenant la notation de l'exercice précédent, comme $\psi_a(x)$ tend vers 1 quand x tend vers 0, on reconnaît dans cette limite la dérivée de ψ_a en 0.

$$\boxed{\text{Et donc } \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln\,(a)}$$

Exercice 206 :

a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}_+^*$ et v une fonction dérivable de I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour x dans $\mathbb{R}$, on pose $w\,(x) = u\,(x)^{v(x)}$.

Calculer la dérivée de w.

b) Écrire l'équation de la tangente au graphe de la fonction $f\,:\, x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^x$ au point d'abscisse 1.

Solution :

a) Nous allons utiliser le procédé de l'exercice 204 et écrire : $\forall x \in I,\ w\,(x) = exp\left(v\,(x)\,ln\left(u\,(x)\right)\right)$

Nous allons dériver w comme une composée de fonctions dérivables (et les hypothèses nous assurent de ne pas diviser par 0. On a donc :

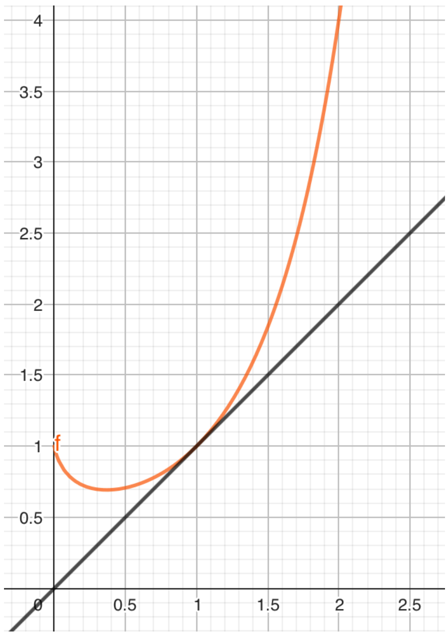
$$\boxed{\forall x \in I,\ w'(x) = \left(v'(x)\,ln\left(u(x)\right) + \frac{u'(x)\,v(x)}{u(x)}\right) exp\left(v(x)\,ln\left(u(x)\right)\right)}$$

b) En utilisant le résultat précédent avec $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u(x) = v(x) = x$, on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \left(ln(x) + 1\right) x^x$ et $f'(1) = 1$.

En utilisant la formule donnant l'équation de la tangente, on a : $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$

Ce qui donne finalement l'équation de la tangente à la courbe de f en 1 : $y = x$.

Graphiquement :



Exercice 207 :

Un problème d'optimisation géométrique.

On considère une boîte fermée en forme de cylindre droit. La base est un disque de rayon $r > 0$, la hauteur du cylindre est $h > 0$.

On note S l'aire latérale de la boîte (incluant les 2 bases) et V son volume.

a) Justifier les relations : $S = 2\pi\left(r^2 + rh\right)$ et $V = \pi r^2 h$.

b) On suppose que V est fixé. En utilisant la relation $S = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi r}\right)$ et en étudiant la fonction $f : r \in \mathbb{R}_+^* \mapsto r^2 + \frac{V}{\pi r}$, dire comment choisir r et h pour que S soit minimale.

Solution :

a) S est constituée de l'aire des 2 bases et de l'aire du « tube ».
Or, l'aire d'un disque de rayon r est égale à πr^2 et celle du tube $2\pi r h$.

Pour le volume, il est égal à l'aire de la base multiplié par la hauteur.

Ce qui donne finalement $S = 2\pi\left(r^2 + rh\right)$ et $V = \pi r^2 h$

b) f est bien dérivable sur son domaine de définition et : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(r) = 2r - \frac{V}{\pi r^2}$.

On constate que f' est elle-même croissante (une fonction en $-\frac{1}{r^2}$ est croissante) entre $-\infty$, sa limite en 0_+ et $+\infty$.
Cela implique que f est décroissante puis croissante avec un minimum quand f' s'annule. Elle s'annule en r_0 tel que : $2r_0 = \frac{V}{\pi r_0^2}$ ou $r_0^3 = \frac{V}{2\pi}$.

Et donc on trouve h_0 : $h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2} = \frac{V}{\pi}\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}\left(\frac{V}{\pi}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4\frac{V}{\pi}}$

$\boxed{\text{Finalement, on minimise } S \text{ avec } r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \text{ et } h_0 = \sqrt[3]{4\frac{V}{\pi}}}$