Remarque : dès qu'on doit étudier le comportement d'une fonction (voir d'une suite définie à partir d'une fonction), il est intéressant de regarder le graphique de la fonction considérée à la calculatrice ou Géogébra !

Exercice 133 :

La suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_n\right).$

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$

a) Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique et exprimer v_n en fonction de v_0 et n.

b) Exprimer u_n en fonction de u_0, u_1 et n. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite que l'on précisera.

c) Reprendre cet exercice à partir de l'exercice 11 (exercice sur les suites linéaires récurrentes d'ordre 2).

Solution :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} + u_n\right) - u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\left(u_{n+1} - u_n\right) = -\dfrac{1}{2}v_n$

Donc $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et $v_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n v_0$

b) En reprenant la définition de v_n, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_1 - u_0\right)$

Ou $u_{n+1} = u_n + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \left(u_1 - u_0\right)$.

Et donc on obtient

$$u_{n+1} = u_0 + \left(u_1 - u_0\right)\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = u_0 + \left(u_1 - u_0\right)\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = u_0 + \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\left(u_1 - u_0\right)$$

En changeant d'indice :

$$u_n = u_0 + \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(u_1 - u_0\right) = \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(u_1 - u_0\right).$$

Finalement $u_n = \dfrac{1}{3}u_0 + \dfrac{2}{3}u_1 - \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\left(u_1 - u_0\right)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1.$

c) En reprenant l'exercice 11, on considère l'équation $x^2 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ dont les solutions sont $\lambda = 1$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

D'après ce qu'on a vu dans l'exercice 11, on utilise le système :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{u_1 - u_0\mu}{\lambda - \mu} = \frac{u_1 + \frac{u_0}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}u_1 \\ \beta = \frac{\lambda u_0 - u_1}{\lambda - \mu} = \frac{2}{3}\left(u_0 - u_1\right) \end{cases}$$

Et on retrouve bien l'écriture de u_n obtenu dans la question précédente !

Exercice 134 :

La suite réelle $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est définie pour ses 2 premiers termes u_0 et u_1, tous 2 strictement positifs et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = ln\left(u_n\right)$

Justifier la définition de $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$. En utilisant $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ et l'exercice précédent, montrer que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Solution :

Pour que $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ soit bien définie, il faut s'assurer, par récurrence que tous les u_n sont bien positifs.
Initialisons la propriété avec u_2, u_0 et u_1 étant donnés : comme $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$, on a bien $u_2 = \sqrt{u_0 u_1} > 0$.

Supposons maintenant que jusqu'au rang $n+1$, tous les u_k sont positifs et étudions le rang $n+2$:
$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} > 0$.
Ce qui nous assure de l'hérédité de la propriété.

$$\boxed{\text{On a donc } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0 \text{ et ainsi } v_n = ln\left(u_n\right) \text{ et bien défini.}}$$

On peut donc écrire : $v_{n+2} = ln\left(u_{n+2}\right) = ln\left(\sqrt{u_n u_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}ln\left(u_n\right) + \frac{1}{2}ln\left(u_{n+1}\right) = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_{n+1}$.

On reconnait (surprise !) que $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence de l'exercice précédent.
On sait donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{3}v_0 + \frac{2}{3}v_1 = \frac{1}{3}ln\left(u_0\right) + \frac{2}{3}ln\left(u_1\right)$.

Ainsi, par continuité de la fonction exponentielle, on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = exp\left(\frac{1}{3}ln\left(u_0\right) + \frac{2}{3}ln\left(u_1\right)\right)$.

$$\boxed{\text{Autrement écrit : } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt[3]{u_0 u_1^2}}$$

Exercice 135 :

La suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + sin\left(u_n\right)$

a) Montrer que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$
b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Solution :

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$:
$u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_1 = u_0 + 1 + sin\left(u_0\right) \geqslant 0$, car $1 + sin\left(u_0\right) \geqslant 0$ (on utilise évidemment le fait que la fonction sinus est à valeurs dans $\left[-1,1\right]$)

Supposons donc la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:
$u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + sin\left(u_n\right) \geqslant 0$, car $\sqrt{n+1} + sin\left(u_n\right) \geqslant 0$
Ce qui assure l'hérédité de la propriété.

$\boxed{\text{On conclut que } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+.}$

b) Avec le résultat précédent, on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{n+1} + sin\left(u_n\right) \geqslant \sqrt{n+1} - 1$

$\boxed{\text{Et ainsi } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

Exercice 136 :

La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + cos\left(nu_n\right) + 2$.

Minorer u_n en fonction de u_0 et n afin de montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Solution :

Etudions les premiers éléments de la suite :

$u_1 = u_0 + 2$

$u_2 = u_1 + cos\left(u_1\right) + 2 = u_0 + cos\left(u_1\right) + 2 \times 2 \geqslant u_0 + 2 \times 2 - 1$ (Comme précédemment, on utilise le fait que la fonction cosinus est à valeurs dans $[-1,1]$)

Tâchons de montrer, à partir de ces premiers termes que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0 + n$.

On suppose donc ce résultat vrai au rang n et étudions le rang $n+1$:

$u_{n+1} = u_n + cos\left(nu_n\right) + 2 \geqslant u_0 + n + 1$, ce qui nous assure l'hérédité de la propriété.

Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_0 + n$.

$\boxed{\text{Ceci implique directement que } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$