<u>Remarque :</u> dès qu'on doit étudier le comportement d'une fonction (voir d'une suite définie à partir d'une fonction), il est intéressant de regarder le graphique de la fonction considérée à la calculatrice ou Géogébra !

Exercice 129 :

a) Calculer la limite de $f(x) = \dfrac{1 - cos(x)}{x}$ en 0.

b) En utilisant la formule de duplication du sinus, déterminer la limite de f en 0.

Solution :

a) On reconnaît la formule de la dérivée du cosinus en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -cos'(0) = 0$.

b) A partir de la formule de duplication du cosinus, on peut réécrire l'expression de f :

$$f(x) = \frac{1 - cos(x)}{x} = \frac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 2\frac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

On reconnaît alors le taux d'accroissement de la fonction $sin^2(X)$ en 0 qui vaut bien 0.

Exercice 130 :

Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

On pourra remarquer que $n \mapsto \binom{n}{k}$ est un polynôme en n.

Solution :

Regardons les premiers k :

$\underline{k = 0} : u_n = \dfrac{\binom{n}{0}}{n^0} = 1$

$\underline{k = 1} : u_n = \dfrac{\binom{n}{1}}{n^1} = 1$

$\underline{k = 2} : u_n = \dfrac{\binom{n}{2}}{n^2} = \dfrac{n(n-1)}{2n^2} = \dfrac{n^2 - n}{2n^2}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

Dans le cas général, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!} = \dfrac{1}{k!}n(n-1)\ldots\left(n-k+1\right)$ et on voit que $n \mapsto \binom{n}{k}$ est un polynôme en n dont le terme dominant est $\dfrac{1}{k!}n^k$.

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{k!}}$$

Exercice 131 :

Trouver la limite en $+\infty$ de :

$$f(x) = \frac{50x + xln(x)}{xln(x) + 3},\ g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + cosx}{x^{20} + 2x^{2021}},\ h(x) = \frac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{\frac{x}{2}}}$$

$i(x) = \frac{ln(1+x)}{ln(x)}$, $j(x) = exp\left(-3\sqrt{x} + x - ln\left(x^2+1\right) + cos(x)\right)$, $k(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$

Solution :

Remarque : on travaille en $+\infty$ et on voit rapidement qu'il n'y a pas de problème de définition particulier. De même, les quantités par lesquelles on va diviser ne seront jamais égales (ou tendant vers) 0. On ne prendra pas la peine de le préciser.

Remarque 2 : dans cet exercice on utilise principalement (sauf pour les dernière) les croissances comparées. N'hésitez pas à aller les réviser si besoin, mais en version courte, l'exponentielle domine la puissance qui donne le logarithme.

$f(x) = \frac{50x + xln(x)}{xln(x) + 3} = \frac{xln(x)}{xln(x)} \times \frac{1 + \frac{50x}{xln(x)}}{1 + \frac{3}{xln(x)}}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

$g(x) = \frac{e^{-x} + \sqrt{x} + e^x + cos(x)}{x^{20} + 2x^{2021}} = \frac{e^x}{x^{20} + 2x^{2021}}\left(1 + e^{-2x} + e^{-x}\sqrt{x} + e^{-x}cos(x)\right)$

Et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$

$h(x) = \frac{e^x - 1}{x^6 + 2e^x + e^{\frac{x}{2}}} = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 - e^{-x}}{2 + x^6e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{1}{2}}$

$i(x) = \frac{ln(1+x)}{ln(x)} = \frac{ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{ln(x)} = \frac{ln(x)}{ln(x)} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{ln(x)}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} i(x) = 1}$

$j(x) = exp\left(-3\sqrt{x} + x - ln\left(x^2+1\right) + cos(x)\right) = exp\left(x\left(1 - \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{ln\left(x^2+1\right)}{x} + \frac{cos(x)}{x}\right)\right)$

Et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} j(x) = +\infty}$

$k(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right)$

Or comme $\frac{1}{x} \to 0$, $\sqrt{1+\frac{1}{x}} \sim 1 + \frac{1}{2x}$ (on utilise l'équation de la tangente à la courbe $x \mapsto \sqrt{1+x}$

Et $x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 1\right) \sim x \times \frac{1}{2x}$.

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} k(x) = \frac{1}{2}}$

Exercice 132 :

Déterminer les limites des suites définies par les formules :

$a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$, $b_n = \frac{\left(ln(n)\right)^{n^2}}{\sqrt{n}^n}$, $c_n = \frac{a^{b^n}}{b^{a^n}}$, $\left(a, b\right) \in \mathbb{N}^{*2}$, $a < b$

Solution :

$$a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}} = \frac{exp\left(nln\left(n\right)\right)}{exp\left(n^2ln\left(2\right)\right)} = exp\left(nln\left(n\right) - n^2ln\left(2\right)\right) = exp\left(n^2\left(\frac{ln\left(n\right)}{n} - ln\left(2\right)\right)\right)$$

Et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$

$$b_n = \frac{\left(ln\left(n\right)\right)^{n^2}}{\sqrt{n}^n} = exp\left(n^2ln\left(ln\left(n\right)\right) - \frac{1}{2}nln\left(n\right)\right) = exp\left(n^2\left(ln\left(ln\left(n\right)\right) - \frac{ln\left(n\right)}{2n}\right)\right)$$

Et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty}$

$$c_n = \frac{a^{b^n}}{b^{a^n}} = exp\left(b^nln\left(a\right) - a^nln\left(b\right)\right) = exp\left(\frac{b^n}{a^n}ln\left(\frac{a}{b}\right)\right)$$

Avec les hypothèses $\frac{a}{b} < 1$ donc $ln\left(\frac{a}{b}\right) < 0$ et $\frac{b^n}{a^n}ln\left(\frac{a}{b}\right) \to -\infty$

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = 0}$