Exercice 11 :

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet deux racines réelles distinctes λ et μ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites réelles $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

a) Montrer que pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $\left(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$.

b) Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{E}$. Vérifier qu'il existe deux nombres réels α et β tels que $\alpha + \beta = u_0$ et $\alpha\lambda + \beta\mu = u_1$.

c) Avec les notation de b), montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$.

d) Retrouver le résultat de l'exercice 7.

Solution :

a) Etudions la relation entre 3 rangs successifs de la série $\left(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a\left(\alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}\right) + b\left(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n\right) = a\alpha\lambda^{n+1} + a\beta\mu^{n+1} + b\alpha\lambda^n + b\beta\mu^n$$
$$= \alpha\lambda^n\left(a\lambda + b\right) + \beta\mu^n\left(a\mu + b\right) = \alpha\lambda^{n+2} + \beta\mu^{n+2}$$

Ceci prouve que la suite $\left(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien un élément de $\mathscr{E}$

b) On considère $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{E}$.

u_0 et u_1 sont donc donnés. On cherche donc α et β qui vérifient :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = u_0 - \alpha \\ \alpha\lambda + \left(u_0 - \alpha\right)\mu = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\left(\lambda - \mu\right) = u_1 - u_0\mu \\ \beta = u_0 - \alpha \end{cases}$$

Finalement, on trouve $\begin{cases} \alpha = \dfrac{u_1 - u_0\mu}{\lambda - \mu} \\ \beta = u_0 - \dfrac{u_1 - u_0\mu}{(\lambda - \mu)} = \dfrac{\lambda u_0 - u_1}{\lambda - \mu} \end{cases}$

c) Tâchons de montrer la propriété demandée par récurrence.

Initialisation : pour $n = 2$

$$u_2 = au_1 + bu_0 = a\left(\alpha\lambda + \beta\mu\right) + b\left(\alpha + \beta\right) = \alpha a\lambda + \alpha b + \beta a\mu + \beta b = \alpha\lambda^2 + \beta\mu^2$$

Hérédité : supposons que la propriété est vraie au rang n et étudions le rang $n+1$.

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} = a\left(\alpha\lambda^n + \beta\mu^n\right) + b\left(\alpha\lambda^{n-1} + \beta\mu^{n-1}\right) = \alpha a\lambda^n + \alpha b\lambda^{n-1} + \beta a\mu^n + \beta b\mu^{n-1}$$
$$= \alpha\lambda^{n-1}\left(a\lambda + b\right) + \beta\mu^{n-1}\left(a\mu + b\right) = \alpha\lambda^{n+1} + \beta\mu^{n+1}$$

Et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$

d) A l'exercice 7, $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 2,\ u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Les solutions de $x^2 = 5x - 6$ sont $\lambda = 2$ et $\mu = 3$.

Avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, on retrouve bien le même résultat !

Exercice 12 :

Soient a et b deux nombres réels. On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ admet une unique racine réelle distinctes λ. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites réelles $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

a) Montrer que pour α et β dans $\mathbb{R}$, la suite $\left(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$.

b) En reprenant la méthode de l'exercice précédent, montrer que si la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathscr{E}$, il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$.

Solution :

a) Initialisation : vérifions la propriété pour $n = 2$.
$au_1 + bu_0 = a\left(\alpha\lambda + \beta\lambda\right) + b\alpha = \alpha\left(a\lambda + b\right) + a\beta\lambda = \alpha\lambda^2 + \beta\left(\lambda^2 - b\right)$

Or, une équation du second degré peut s'écrire $x^2 - Sx + P$ où S et P sont respectivement la somme et le produit des racines du trinôme. On a donc $-b = \lambda$.
Ceci permet de confirmer que $au_1 + bu_0 = \alpha\lambda^2 + 2\beta\lambda^2$ et $u_2 = au_1 + bu_0$.

Hérédité : supposons qu'au rang $n+1$ la propriété doit vraie (ie. $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$) et étudions le rang $n+2$:
$au_{n+1} + bu_n = a\left(\alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^{n+1}\right) + b\left(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n\right) = \alpha\lambda^n\left(a\lambda + b\right) + \beta n\lambda^n\left(a\lambda + b\right)$
$= \alpha\lambda^{n+2} + \beta\lambda^n\left(a(n+1)\lambda + nb\right) = \alpha\lambda^{n+2} + \beta\lambda^n\left((n+1)\lambda^2 - b\right) = \alpha\lambda^{n+2} + \beta(n+2)\lambda^{n+2}.$
Et la propriété est confirmée pour le rang $n+2$.

On conclut donc $\left(\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}$.

b) Procédons comme proposé de la même façon que dans l'exercice précédent en identifiant α et β (la présence du n simplifie le système !) :

$$\begin{cases}\alpha = u_0\\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = u_0\\ \beta = \frac{u_1 - u_0\lambda}{\lambda}\end{cases}$$

Je ne refais pas le calcul, le raisonnement étant identique à l'exercice précédent, avec les calculs de la question ci-dessus ! (N'hésitez pas à les refaire en entraînement).

Exercice 13 :

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 telle que :
i) $\forall n \in A,\ 2n \in A$ ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n+1 \in A \Rightarrow n \in A$

a) Montrer que $\forall m \in \mathbb{N},\ 2^m \in A$
b) Montrer que $A = \mathbb{N}^*$

Solution :

a) Par définition, $1 \in A$. Donc par la 1ère propriété de A, $2 \times 1 = 2 \in A$.
On a donc initialisé la récurrence avec 2^0 et 2^1 sont bien dans A.

Hérédité : supposons 2^m dans A et étudions le rang $m+1$:
A nouveau en utilisant la 1ère propriété, $2^m \in A \Rightarrow 2 \times 2^m = 2^{m+1} \in A$ et on s'assure de l'hérédité de la propriété.

On conclut $\forall m \in \mathbb{N},\ 2^m \in A$

b) On va montrer par récurrence que tous les entiers entre 2^m et 2^{m+1} sont bien dans A.
initialisation : entre 2^1 et 2^2 : 4 étant dans A, $4 - 1 = 3$ est bien dans A et donc tous les éléments le sont.
Hérédité : considérons que tous les entiers entre 2^m et 2^{m+1} sont dans A et étudions le rang 2^{m+2} (entre 2^{m+1} et 2^{m+2}) :
Par hypothèse $\forall k \in \left[2^m ; 2^{m+1}\right],\ k \in A$ et en utilisant la 1ère propriété on a $2k \in A$, ce qui signifie que tous les nombres pairs entre 2^{m+1} et 2^{m+2} sont bien dans A.

En utilisant la 2ème propriété, on trouve que tous les $2k-1$ sont également dans A et donc tous les nombres impairs contenus entre 2^{m+1} et 2^{m+2} sont dans A.
La propriété reste donc bien valable entre 2^{m+1} et 2^{m+2}.

On conclut finalement que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 :

Fraction égyptiennes

On se propose de montrer que que tout rationnel de $\left]0,1\right[$ s'écrit comme une somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts. Ce type d'écriture, utilisée par les égyptiens pendant l'antiquité, n'a pas grand intérêt, mais la preuve du résultat est un bon exemple de raisonnement par récurrence.

a) Soit x un rationnel de $\left]0,1\right[$. On écrit donc $x = \dfrac{m}{n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2},\ m < n$.

On effectue la division euclidienne de n par m : $n = mq + r,\ q \in \mathbb{N}^*,\ r \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.
On suppose que x n'est pas l'inverse d'un entier, ie. que m ne divise pas n ou encore $r \neq 0$
Montrer que $x - \dfrac{1}{q+1}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{m'}{n'},\ n' \in \mathbb{N}^*,\ m' \in \{1,\ldots,m-1\}$

b) En utilisant une hypothèse de récurrence judicieuse, démontrer la propriété voulue.

c) Constater que la démonstration précédente fournie un algorithme de calcul et l'appliquer à $x = \dfrac{5}{17}$

Solution :

a) Soit x un rationnel de $\left]0;1\right[$, on écrit $x = \dfrac{m}{n},\ (m,n) \in \mathbb{N}^{*2},\ m < n$.

On écrit $n = mq + r$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $0 < r < m$ par hypothèse.

$$x - \frac{1}{q+1} = \frac{m}{n} - \frac{1}{q+1} = \frac{m}{mq+r} - \frac{1}{q+1} = \frac{mq+m-mq-r}{n\left(q+1\right)} = \frac{m-r}{n\left(q+1\right)}$$

En posant $m' = m - r$ et $n' = n\left(q+1\right)$, on a bien $x - \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{m'}{n'}$ avec $0 < m' < m$ par définition de r.

b) Notons qu'on est plutôt dans un algorithme « tant que » que dans une récurrence. C'est d'ailleurs le sens de la question suivante, mais je mets la remarque dès maintenant, car on ne pourra évidemment pas avoir une proposition du type « $\forall n \in \mathbb{N}$ » ce qui pourrait déranger certains.

Initialisons la proposition : Tant que $m_i > 1$, on peut écrire $x - \displaystyle\sum_{k}^{i} \frac{1}{q_k+1} = x_i = \frac{m_{i+1}}{n_{i+1}}$ avec

$0 < m_{i+1} < m_i$. On a de plus $m_{i+1} = m - \displaystyle\sum_{k=0}^{i} r_k$ et $n_{i+1} = n_0 \displaystyle\prod_{k=0}^{i} \left(q_k+1\right)$.

Par construction, on a toujours $x_i < 1$.

On modifie les notation de la réponse précédente en $x = \dfrac{m_0}{n_0}$ et $n_0 = m_0 q_0 + r_0$, puis $m_1 = m_0 - r_0$ et $n_1 = n_0\left(q_0+1\right)$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang i et étudions le rang $i+1$
En effectuant la division euclidienne de n_{i+1} par m_{i+1} : $n_{i+1} = m_{i+1}q_{i+1} + r_{i+1}$.

On a $x_{i+1} = x_i - \dfrac{1}{q_{i+1}+1} = \dfrac{m_{i+1}}{n_{i+1}} - \dfrac{1}{q_{i+1}+1} = \dfrac{m_{i+1}}{m_{i+1}q_{i+1}+r_{i+1}} - \dfrac{1}{q_{i+1}+1} = \dfrac{m_{i+1}-r_{i+1}}{n_{i+1}\left(q_{i+1}+1\right)}$

Ce qui confirme l'hérédité de la propriété.

Ainsi construite, la suite des (m_i) est strictement décroissante et minorée (strictement également) par 0.

L'algorithme se termine quand un $m_k = 1$ et qu'on peut écrire $\dfrac{m_k}{n_k} = \dfrac{1}{n_k}$.

$\boxed{\text{Et donc } x \text{ s'écrit comme une somme d'inverse d'entiers.}}$

c) L'algorithme a été explicité dans la question précédente, traitons l'exemple proposé.

$x = \dfrac{5}{17}$ et $17 = 3 \times 5 + 2 = q_0 \times 5 + r_0$

$x - \dfrac{1}{4} = x_1 = \dfrac{5}{17} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{20-17}{68} = \dfrac{3}{68} = \dfrac{m_1}{n_1}$ et $68 = 3 \times 22 + 2 = q_1 \times 3 + r_1$

$x - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{23} = x_2 = \dfrac{3}{68} - \dfrac{1}{23} = \dfrac{69-68}{1564} = \dfrac{1}{1564} = \dfrac{m_2}{n_2}$.

On remarque que $m_2 = 1$ et donc l'algorithme est terminé.

$\boxed{\text{Finalement, on peut écrire : } \dfrac{5}{17} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{23} + \dfrac{1}{1564}.}$