Exercice 15 :

La suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant n+1$

b) Trouver $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant C\,(n+1)$

Solution :

a) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor}$

Initialisation : $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor = 0$, donc $u_1 = 3u_0 = 3 \geqslant 2$

Hérédité : supposons la propriété vraie <u>jusqu'au</u> rang n et étudions le rang $n+1$.

$u_{n+1} = u_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor}$

Par hypothèse de récurrence :

$$u_{n+1} = u_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor} \geqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3$$

On procède par disjonction de cas :

- Commençons par s'intéresser au cas $n = 2k+1$:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3 = k+1+\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3 \geqslant k+4+\frac{n+1}{2} - 2 = 2k+3 \geqslant n+2$$

- Regardons maintenant le cas $n = 2k$ et $2k+1 = 3h$

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3 = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k+1}{6} \right\rfloor + 3 \geqslant k+h+\frac{h}{2} - 1 + 3$$
$$= k + \frac{2k+1}{2} + 2 \geqslant 2k+2 = n+2$$

- Etudions le dernier cas $n+1 = 3h+2$:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3 = \left\lfloor \frac{3h+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3h+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3h+2}{6} \right\rfloor + 3$$

Nous allons à nouveau diviser en 2 cas !

Si h est pair :

$$\left\lfloor \frac{3h+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3h+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3h+2}{6} \right\rfloor + 3 = \frac{3h}{2} + 1 + h + \frac{h}{2} + 3 \geqslant 3h+3 = n+2$$

Si h est impair :

Nous allons écrire $h = 2k+1$ (finalement $n+1 = 6k+5$)

$$\left\lfloor \frac{3h+2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3h+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3h+2}{6} \right\rfloor + 3 = \left\lfloor \frac{6k+5}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6k+5}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6k+5}{6} \right\rfloor + 3$$
$$= 3k+2+3k+1+k+3 = 7k+6 \geqslant n+2$$

Finalement, la propriété est bien héréditaire !

Et on conclut donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant n+1$

b) Regardons les premiers rangs :

$u_1 = 3$ et $\dfrac{u_n}{n+1} = \dfrac{3}{2}$

$u_2 = u_1 + u_0 + u_0 = 5$ et $\dfrac{u_n}{n+1} = \dfrac{5}{3} \leqslant 3$

$u_3 = u_1 + u_1 + u_0 = 7$ et $\dfrac{u_n}{n+1} = \dfrac{7}{4} \leqslant 3$

$u_4 = u_2 + u_1 + u_0 = 9$ et $\dfrac{u_n}{n+1} = \dfrac{9}{5} \leqslant 3$

$u_5 = u_2 + u_2 + u_1 = 13$ et $\dfrac{u_n}{n+1} = \dfrac{13}{6} \leqslant 3$

Posons donc $C = 3$ et montrons par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 3\,(n+1)$.
L'initialisation est faite au-dessus, c'est elle qui nous a permis de faire une proposition pour C.

Hérédité :
On suppose que $\forall k \leqslant n,\ u_k \leqslant 3\left(k+1\right)$ et on étudie le rang $n+1$

$$u_{n+1} = u_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor} \leqslant 3\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 3\right)$$

Reprenons la disjonction de cas, sous forme synthétisée :

n	$n+1$	$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$	$Somme$
$6k$	$6k+1$	$3k$	$2k$	k	n
$6k+1$	$6k+2$	$3k+1$	$2k$	k	n
$6k+2$	$6k+3$	$3k+1$	$2k+1$	k	n
$6k+3$	$6k+4$	$3k+2$	$2k+1$	k	n
$6k+4$	$6k+5$	$3k+2$	$2k+1$	k	$n-1$
$6k+5$	$6k+6$	$3k+3$	$2k+2$	$k+1$	$n+1$

Malheureusement, le « $+3$ » résiduel nous empêche d'avancer ! Le tableau nous indique qu'on ne pourra pas affiner notre majoration.

Il faut ajouter une étape intermédiaire, pour laquelle nous allons utiliser la même méthode de récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 3n$ (on cherche tout simplement à s'affranchir de la quantité qui nous dérange et notre tableau nous laisse penser que la piste est prometteuse !)

Initialisation : les valeurs données plus haut confirme cette hypothèse pour les premiers rang non nuls ! C'est pour cela qu'il faut vérifier jusqu'à u_4 qui fait encore intervenir u_0.

Hérédité :
On suppose que $\forall 0 < k \leqslant n,\ u_k \leqslant 3k$ et on étudie le rang $n+1$:

$$u_{n+1} = u_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + u_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor} \leqslant 3\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor\right)$$

Or, $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{n+1}{6} \right\rfloor \leqslant n+1$ (majoration qui peut être obtenue sans le tableau, mais juste avec définition de la partie entière).

Et on conclut la récurrence : $u_{n+1} \leqslant 3\,(n+1)$.

Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 3n$

On en déduit immédiatement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant 3(n+1)$
$u_0 = 1 \leqslant 3$ nous permet d'étendre le résultat et de finir l'exercice avec :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 3(n+1)}$

Exercice 17 :

Soient $a,\ b,\ c,\ d$ des nombres rationnels tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$

Montrer que $a = c$ et $b = d$.

Solution :

Comme $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, on a $a - c = (d - b)\sqrt{2}$.

Supposons par l'absurde que $b \neq d$:
On trouve alors : $\dfrac{a-c}{d-b} = \sqrt{2}$

Comme $a,\ b,\ c,\ d$ sont des nombres rationnels, il en est de même pour $\dfrac{a-c}{d-b}$ et ainsi également de $\sqrt{2}$.
Ce qui est absurde car on sait que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Donc $b = d$. Ce qui implique également que $a = c$.

On conclut donc que si $a,\ b,\ c,\ d$ sont des nombres tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ alors $a = c$ et $b = d$.

Exercice 18 :

Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel. Généraliser.

Solution :

Supposons par l'absurde que $\sqrt{3}$ soit un nombre rationnel : $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p \wedge q = 1,\ \sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$.

Dans ce cas, on peut écrire : $p^2 = 3q^2$ et p^2 est un multiple de 3.

Regardons ce que cela implique, par disjonction de 3 cas, avec $k \in \mathbb{N}$:
Soit $p = 3k \Rightarrow p^2 = 3\left(3k^2\right)$
Soit $p = 3k + 1 \Rightarrow p^2 = 3\left(3k^2 + k\right) + 1$
Soit $p = 3k + 2 \Rightarrow p^2 = 3\left(3k^2 + 4k + 1\right) + 1$
Ainsi, p^2 est un multiple de 3 implique que p est également un multiple de 3.

Et dans ce cas, $p^2 = 3\left(3k^2\right) = 3q^2$ et $3k^2 \ = q^2$ et on trouve que p est lui-aussi un multiple de 3.

Et donc $\dfrac{p}{q}$ n'est pas une fraction irrationnelle, ce qui est absurde par hypothèse.

On conclut donc que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

On peut généraliser en prouvant qu'un entier est soit un carré parfait, soit sa racine est irrationnelle.