BAC Série C 1978 - AMIENS

Exercice 1 :

1. Par définition de $\left(V_n\right)_{n\geqslant 0}$, $V_0 = U_0 - i\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Donc } V_0 = 1 - i\sqrt{3}}$

Reprenons la définition des 2 suites : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \left(1+i\sqrt{3}\right)U_n + 3$ et $V_n = U_n - i\sqrt{3}$
Cela permet d'écrire :
$V_{n+1} = U_{n+1} - i\sqrt{3} = \left(1+i\sqrt{3}\right)U_n + 3 - i\sqrt{3} = U_n - i\sqrt{3} + i\sqrt{3}\left(U_n - i\sqrt{3}\right)$

$\boxed{\text{Ce qui donne : } \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = V_n\left(1+i\sqrt{3}\right)}$

Montrons rapidement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$

Initialisation : $V_1 = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right) = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^1$

Hérédité : Supposons la propriét vraie) un rang n pour lequel $V_n = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ et étudions le rang $n+1$:
D'après la question précédente, $V_{n+1} = V_n\left(1+i\sqrt{3}\right)$
Et d'après l'hypothèse de récurrence : $V_n = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$
Donc $V_{n+1} = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^n\left(1+i\sqrt{3}\right) = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^{n+1}$

Ce qui assure l'hérédité.

$\boxed{\text{On conclut : } \forall n \in \mathbb{N},\ V_n = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}$

En reprenant la définition de V_n, on trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = V_n + i\sqrt{3} = V_0\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + i\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Et finalement } \forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)^n + i\sqrt{3}}$

2. Pour trouver la nature géométrique de f, commençons par chercher un point fixe de la transformation.
On cherche donc une affixe ω vérifiant : $\omega = \left(1+i\sqrt{3}\right)\omega + 3$

Ce qui donne $\omega = -\dfrac{3}{i\sqrt{3}} = i\sqrt{3}$

L'unique point fixe de la transformation est donc $\Omega(0, i\sqrt{3})$.

Regardons maintenant quelles sont les caractéristiques de la transformation en étudiant le quotient : $a = \dfrac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega}$ (*<u>Rappel :</u> le module de a donne le rapport de la transformation et son argument l'angle de la transformation*).

$$a = \frac{f(z) - f(\omega)}{z - \omega} = \frac{\left(1 + i\sqrt{3}\right) z + 3 - i\sqrt{3}}{z - i\sqrt{3}} = \frac{\left(z - i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{z - i\sqrt{3}} = 1 + i\sqrt{3}$$

Donc $|a| = 2$ et $arg\,(a) = \dfrac{\pi}{3}$ (<u>*Rappel :*</u> $\forall z \in \mathbb{C},\ z = |z| \left(cos\left(arg\,(z)\right) + isin\left(arg\,(z)\right)\right)$)

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une similitude directe de centre } \Omega(0, i\sqrt{3}) \text{, de rapport } 2 \text{ et d'angle } \dfrac{\pi}{3}.}$

$f^{(n)}$ correspond à l'application de n fois la similitude f.

$\boxed{\text{On en déduit que } f^{(n)} \text{ est une similitude directe de centre } \Omega(0, i\sqrt{3}) \text{, de rapport } 2^n \text{ et d'angle } \dfrac{n\pi}{3}.}$

3. Notons z_n l'affixe du point A_n.

Par définition de f, on trouve que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \left(1 + i\sqrt{3}\right) z_n + 3$ avec $z_0 = 1$.
On reconnaît la définition de $\left(U_n\right)_{n \geqslant 0}$.

$\boxed{\text{On va donc avoir : } \forall n \in \mathbb{N},\ z_n = U_n = \left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n + i\sqrt{3}.}$

Exercice 2 :

1. Etudions les différents cas.

<u>$p = 1$:</u> détaillons rapidement ce premier cas. Il n'y a qu'une revue à vendre. Le seul cas d'invendu est donc s'il n'y a aucun clients (A_1). S'il y a plus de clients que de revues (ie. $A_n,\ n \geqslant 2$), le gain n'augmente plus pour ces derniers cas.
Ainsi on trouve :
$G_1\left(A_0\right) = -1,\ G_1\left(A_1\right) = 3 = G_1\left(A_2\right) = G_1\left(A_3\right) = G_1\left(A_4\right) = G_1\left(A_5\right)$

<u>$p = 2$:</u>
$G_2\left(A_0\right) = -2,\ G_2\left(A_1\right) = 2,\ G_2\left(A_2\right) = 6 = G_2\left(A_3\right) = G_2\left(A_4\right) = G_2\left(A_5\right)$

<u>$p = 3$:</u>
$G_3\left(A_0\right) = -3,\ G_3\left(A_1\right) = 1,\ G_3\left(A_2\right) = 5,\ G_3\left(A_3\right) = 9 = G_3\left(A_4\right) = G_3\left(A_5\right)$

<u>$p = 4$:</u>
$G_4\left(A_0\right) = -4,\ G_4\left(A_1\right) = 0,\ G_4\left(A_2\right) = 4,\ G_4\left(A_3\right) = 8,\ G_4\left(A_4\right) = 12 = G_4\left(A_5\right)$

<u>$p = 5$:</u>
$G_5\left(A_0\right) = -5,\ G_5\left(A_1\right) = -1,\ G_5\left(A_2\right) = 3,\ G_5\left(A_3\right) = 7,\ G_5\left(A_4\right) = 11,\ G_5\left(A_5\right) = 15$

Ce que l'on peut récapituler dans un tableau :

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
G_1	-1	3	3	3	3	3
G_2	-2	2	6	6	6	6
G_3	-3	1	5	9	9	9
G_4	-4	0	4	8	12	12
G_5	-5	-1	3	7	11	15

2. *<u>Attention :</u> il y a une erreur dans l'énoncé, c'est les $E(G_p)$ qu'il faut calculer.*

$$E\left(G_1\right) = \frac{1}{32}\left(-1+15+30+30+15+3\right) = \frac{92}{32} = \frac{23}{8}$$
$$E\left(G_2\right) = \frac{1}{32}\left(-2+10+60+60+30+6\right) = \frac{104}{32} = \frac{13}{4}$$
$$E\left(G_3\right) = \frac{1}{32}\left(-3+5+50+90+45+9\right) = \frac{196}{32} = \frac{93}{16}$$
$$E\left(G_4\right) = \frac{1}{32}\left(-4+0+40+80+60+12\right) = \frac{188}{32} = \frac{47}{8}$$
$$E\left(G_5\right) = \frac{1}{32}\left(-5-5+30+70+55+15\right) = \frac{160}{32} = 5$$

Le plus rentable est donc d'acheter 3 revues par semaine.

Problème :

Partie A :

1. Vérifions si L vérifie les caractéristiques d'un sous-espace vectoriel :

- <u>L est non vide :</u> en particulier f_1, f_2 et f_3 sont éléments de L
- <u>L est stable par addition :</u>

Soient f et g 2 éléments de L. On a donc : $\exists\left(a,b,c\right) \in \mathbb{R}^3,\ f = af_1 + bf_2 + cf_3$
Et $\exists\left(\alpha,\beta,\gamma\right) \in \mathbb{R}^3,\ g = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3$

Ainsi, $f + g = (a+\alpha)f_1 + \left(b+\beta\right)f_2 + \left(c+\gamma\right)f_3 \in L$

Et L est stable par addition.

- <u>L est stable par multiplication par un scalaire :</u>

Soit f dans L et $\exists\left(a,b,c\right) \in \mathbb{R}^3,\ f = af_1 + bf_2 + cf_3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:
$\alpha f = \alpha a f_1 + \alpha b f_2 + \alpha c f_3 \in L$

On conclut que L est un sous espace vectoriel de E.

Cherchons maintenant une base de L.
Par définition de L, on sait que $\left(f_1, f_2, f_3\right)$ est une famille génératrice. Il faut donc montrer qu'elle est libre.
Soient $\left(a,b,c\right) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0$.

On a $f(0) = 0$ par définition
Et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = ax^2 ln\,|x| + b\left(x^2+1\right)ln\,|x| + cx ln\,|x| = ln\,|x|\left(\left(a+b\right)x^2 + cx + b\right)$

On sait que $x \mapsto ln\ |x|$ s'annule uniquement en 1 et -1.
Donc pour que f soit la fonction nulle, il faut que $(a+b)X^2 + cX + b$ soit le polynôme nul. *(Rappel : un polynôme non nul possède au maximum autant de racines que son degré dans $\mathbb{R}$. Et autant que son degré dans $\mathbb{C}$).*
Il faut donc que tous ses coefficients soient nuls ce qui impose $b = c = 0$ et finalement $a = -b = 0$.

Ceci assure que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

$\boxed{\text{On conclut donc que } \mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3) \text{ est une base de } L.}$

2. Reprenons une fonction $f \in L$. $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ f = af_1 + bf_2 + cf_3$
Vérifions la parité des éléments de $\mathscr{B}$, en considérant un $x \in \mathbb{R}^*$:
$f_1(-x) = (-x)^2\, ln\ |-x| = x^2 ln\ |x| = f_1(x)$
$f_2(-x) = \left((-x)^2 + 1\right) ln\ |-x| = (x^2+1)\ ln\ |x| = f_2(x)$
Donc f_1 et f_2 sont paires.
Cela permet de conclure que le plan de base (f_1, f_2) est inclus dans P

$f_3(-x) = -x ln\ |-x| = -x ln\ |x| = -f_3(x)$
Et f_3 est impaire (on a bien également $f_3(0) = 0$).
On a donc la droite de base (f_3) est incluse dans I

Comme L est de dimension 3, on a bien l'égalité des ensembles.

$\boxed{\text{Donc } P \text{ est le plan de base } (f_1, f_2) \text{ et } I \text{ la droite de base } (f_3).}$

3. Nous allons vérifier si φ possède les propriétés d'un produit scalaire.
- <u>Commutatif:</u>

La définition de φ rend cette propriété immédiate (commutativité dans $\mathbb{R}$).
$\varphi(f,g) = aa' + 2bb' + cc' + (ab' + ba') = \varphi(g,f)$

- <u>Distributivité par rapport à l'addition :</u>

On considère en complément h de coordonnées (α, β, γ).
$$\varphi(f, g+h) = a(a'+\alpha) + 2b(b'+\beta) + c(c'+\gamma) + \left(a(b'+\beta) + b(a'+\alpha)\right)$$
$$= aa' + 2bb' + cc' + (ab' + ba') + a\alpha + 2b\beta + c\gamma + (a\beta + b\alpha) = \varphi(f,g) + \varphi(f,h)$$
(On utilise cette fois la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$).

- <u>Multiplication par un scalaire :</u>

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
$$\varphi(\lambda f, g) = \lambda aa' + 2\lambda bb' + \lambda cc' + (\lambda ab' + \lambda ba') = a\lambda a' + 2b\lambda b' + c\lambda c' + (a\lambda b' + b\lambda a') = \varphi(f, \lambda g)$$
$$= \lambda\left(aa' + 2bb' + cc' + (ab' + ba')\right) = \lambda\varphi(f,g)$$

- <u>Défini positif :</u>

$\varphi(f,f) = a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ab = (a+b)^2 + b^2 + c^2 \geqslant 0$
Une somme de 3 nombres positifs est nulle si et seulement si les 3 nombres sont nuls, donc $a = b = c = 0$ et f est la fonction nulle.

$\boxed{\text{Toutes ces propriétés confirme bien que } \varphi \text{ est une produit scalaire.}}$

Par leurs définitions on a $P \cap I = 0$ (une fonction non nulle ne peut pas être paire et impaire).
Et d'après leurs bases, $L = P \oplus I$

De plus, si $f \in P$ ses coordonnées sont $(a, b, 0)$ et si $g \in I$, ses coordonnées sont $(0,0,c')$, $(a, b, c') \in \mathbb{R}^3$.
On en déduit que $\varphi\left(f, g\right) = 0$.

On conclut donc que P et I sont 2 sous-espaces supplémentaires orthogonaux de L.

D'après la question précédente, on vérifie rapidement que f_1 et f_3 sont bien orthogonales et de norme 1.
On a nécessairement $f_4 \in P$ ou $f_4 = af_1 + bf_2$.

On veut de plus $f_1 \perp f_4$ ou $\varphi\left(f_1, f_4\right) = 0$
Or $\varphi\left(f_1, f_4\right) = a + b$, donc cela nécessite $a = -b$.

Comme on doit également avoir $\sqrt{\varphi\left(f_4, f_4\right)} = 1$, il faut
$\varphi\left(f_4, f_4\right) = a^2 + 2b^2 + 2ab = 3a^2 - 2a^2 = a^2 = 1$.
On doit donc avoir $a = \pm 1$ et $a = -b$.

Donc en posant $f_4 = f_1 - f_2$, $\left(f_1, f_4, f_3\right)$ est une base orthonormale de L.

Partie B :

1. <u>Remarque :</u> *malheureusement je n'arrive toujours pas à faire des tableaux de variations dans le logiciel que j'utilise pour taper les corrections !*

a. $\forall x \in \mathbb{R}^* - \left\{-\frac{1}{2}\right\},\ h(x) = \frac{x+1}{2x+1} + ln\,|x|$

h est bien dérivable sur son domaine de définition comme somme et quotient de fonctions qui le sont.
$\forall x \in \mathbb{R}^* - \left\{-\frac{1}{2}\right\},\ h'(x) = \frac{2x+1-2(x+1)}{(2x+1)^2} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+3x+1}{x(2x+1)^2}$
Etudions le signe de $x \mapsto 4x^2 + 3x + 1$ en cherchant déjà ses racines :
$\Delta = 9 - 16 = -5 < 0$ donc $x \mapsto 4x^2 + 3x + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ et est toujours du signe de son coefficient dominant (toujours positive donc).

Comme on a également $(2x+1)^2$ qui est toujours positif, finalement h' est du signe de x.

Finalement h est décroissante sur $\mathbb{R}^*_- - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et croissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

Calculons maintenant les limites de la fonction en $-\infty,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ +\infty$:

<u>En $-\infty$:</u>
Quand $x \to -\infty$, $|x| \to +\infty$ et $ln\,|x| \to +\infty$.
De plus, $\frac{x+1}{2x+1} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2\left(1+\frac{1}{2x}\right)} \to \frac{1}{2}$

Finalement, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

<u>En $+\infty$:</u>
Exactement de la façon, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

En $-\frac{1}{2}$:

Quand $x \to -\frac{1}{2}$, $ln\,|x| \to -ln\,(2)$ et $x+1 \to \frac{1}{2}$

La quantité $\frac{x+1}{2x+1}$ va donc diverger et la limite va être déterminer par le signe de $2x+1$ et donc de la position de x par rapport à $-\frac{1}{2}$.

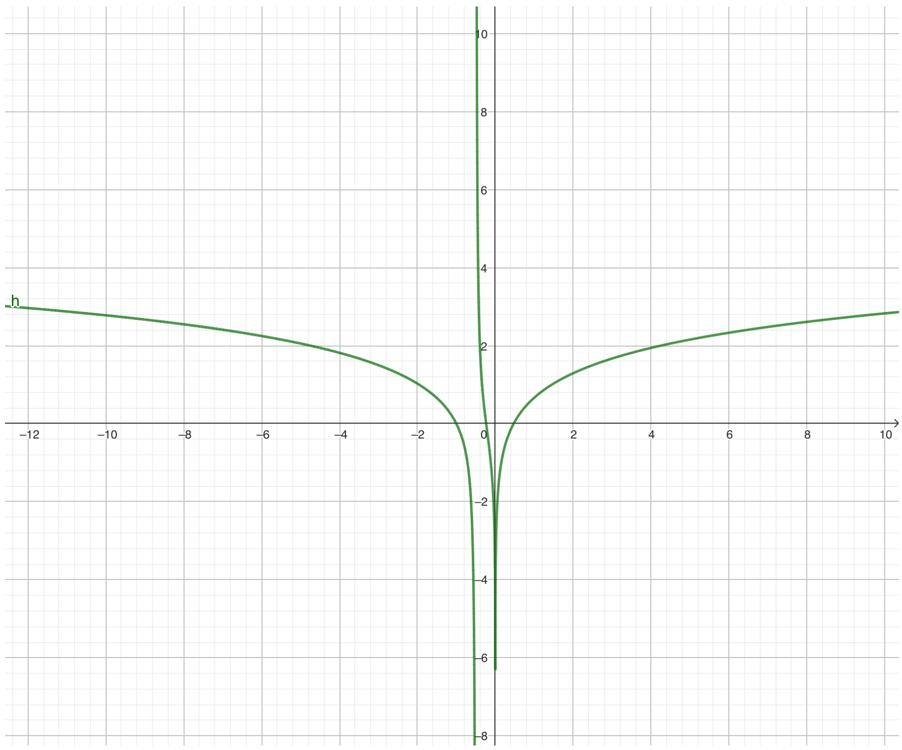
On a donc $\lim_{x \to -\frac{1}{2}_-} h\,(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\frac{1}{2}_+} h\,(x) = +\infty$

En 0 :

Si $x \to 0$, $\frac{x+1}{2x+1} \to 1$ et $ln\,|x| \to -\infty$

Ainsi, $\lim_{x \to 0} h\,(x) = -\infty$

Et la représentation graphique :



b. Les différentes limites exhibées à la question précédente, et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ et $]0, +\infty[$ où la fonction est continue, on a bien 3 racines pour h.

$h\,(-1) = 0$ et est bien la seule racine inférieure à $-\frac{1}{2}$.

On vérifie les valeurs numériques des encadrements proposées :

$h\left(-\frac{1}{4}\right) \simeq 0.11$ et $h\left(-\frac{1}{8}\right) \simeq -0.91$

$h\left(\frac{3}{8}\right) \simeq -0.2$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0.06$

On a bien $-1 \leqslant \alpha < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < \beta < -\frac{1}{8}$ et $\frac{3}{8} < \gamma < \frac{1}{2}$.

c. On en déduit que :

$\forall x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, \beta\right] \cup \left[\gamma, +\infty\right[$, $h(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\beta, 0\right[\cup \left]0, \gamma\right]$, $h(x) \leqslant 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_5(x) = f_1(x) + f_3(x) = \left(x^2 + x\right) ln\ |x|$ et $f_5(0) = 0$

Etudions tout d'abord la continuité de f_5 :

f_5 est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

De plus, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + x\right) ln\ |x| = 0$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f_5(x) = 0$.

On conclut que f_5 est continue sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité :

f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de fonctions qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_5'(x) = (2x+1)\, ln\ |x| + \frac{1}{x}\left(x^2 + x\right) = (2x+1)\, ln\ |x| + x + 1$

Sens de variation :

Pour étudier le sens de variation de f_5, il faut étudier le signe de f_5' :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_5'(x) = (2x+1)\, ln\ |x| + x + 1$.

Nous allons donc utiliser l'étude de la fonction h pour déterminer le signe de f_5'.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^* - \left\{-\frac{1}{2}\right\},\ h(x) = \frac{x+1}{2x+1} + ln\ |x| = \frac{f_5'(x)}{2x+1}$

Ainsi, pour $x \leqslant -\frac{1}{2}$, f_5' est du signe opposé de h et les 2 fonctions sont du même signe pour $x \geqslant -\frac{1}{2}$.

On a donc $\forall x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[\beta, \gamma\right] \backslash \{0\},\ f_5'(x) \leqslant 0$ et $\forall x \in \left[-1, \beta\right] \cup \left[\gamma, +\infty\right[,\ f_5'(x) \geqslant 0$

Finalement, f_5 est décroissante sur $\left]-\infty, -1\right]$, croissante sur $\left[-1, \beta\right]$, à nouveau décroissante sur $\left[\beta, \gamma\right]$ et finalement croissante sur $\left[\gamma, +\infty\right[$.

Limite en $+\infty$:

$f_5(x) = \left(x^2 + x\right) ln\ |x| = x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) ln\ |x|$

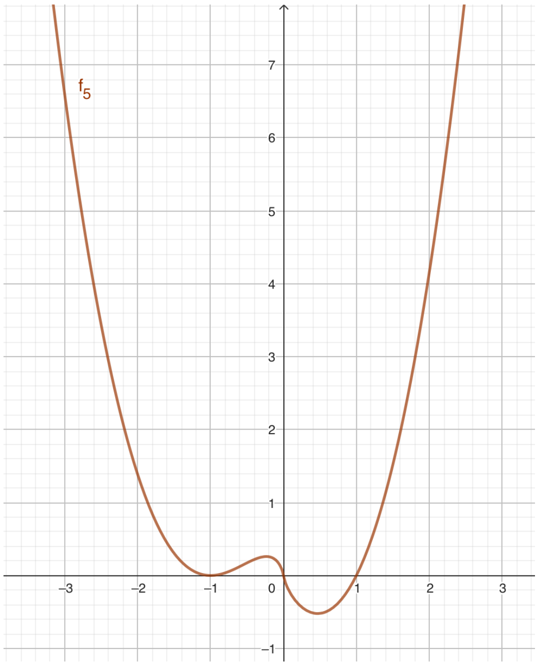
Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_5(x) = +\infty$

Limite en $-\infty$:

La mise en facteur précédente nous permet de remarquer que le signe de x n'intervient pas dans la limite en $-\infty$.

On finit l'étude de la fonction avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f_5(x) = +\infty$

Représentation graphique :



3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_5$ est continue sur $[1,x]$ (ou $[x,1]$), ainsi F est bien définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, étant dérivable elle est continue.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_1^x f_5(t)\,dt = \int_1^x \left(t^2+t\right) ln\,|t|\,dt$$

Procédons à une intégration par parties :

$$\forall x > 1,\ F(x) = \int_1^x \left(t^2+t\right) ln\,|t|\,dt = \left[\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right) ln\,|t|\right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)dt$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right) ln\,|x| - \left[\frac{t^3}{9}+\frac{t^2}{4}\right]_1^x = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right) ln\,|x| - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}$$

Si

$$x < 1,\ F(x) = \int_1^x \left(t^2+t\right) ln\,|t|\,dt = -\int_x^1 \left(t^2+t\right) ln\,|t|\,dt = -\left[\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right) ln\,|x| - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + \frac{13}{36}\right]$$

Et $F(1) = 0$

Par croissance comparée, quand $x \to 0,\ \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right) ln\,|x| \to 0$

$\boxed{\text{Et donc } F(0) = -\frac{13}{36}}$

Partie C :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = -2\left(x^2 - x\right) ln\,|x| = -2x^2 ln\,|x| + 2x\,ln\,|x| = -2f_1(x) + 2f_3(x)$

$\boxed{\text{Avec } g(0) = 0,\ \text{on conclut } g = -2f_1 + 2f_3 \in L}$

2. S est la symétrie orthogonale par rapport à P.

En reprenant les éléments de la partie A, la composante de g sur P et la composante orthogonale à P (ie sur I) change de signe.

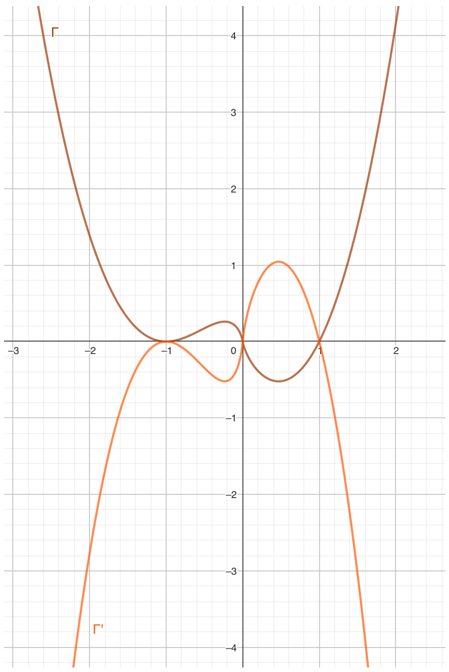
Comme $g = -2f_1 + 2f_3$, $S\left(g\right) = -2f_1 - 2f_3$

Et donc $S\left(g\right) = -2f_5$

Le sens de variation de $S(g)$ est donc opposé à celui de f_5

Je laisse à chacun le soin de reprendre toutes les dites variations !

3.



4. L'aire $\mathscr{A}$ est « constituée » de $\left|F\left(0\right)\right|$ calculée précédemment ainsi que 2 fois cette même valeur compte-rendu de la définition de $S(g)$.

Et pour finir $\mathscr{A} = \dfrac{39}{36}$