Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S Métropole juin 1995 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2-2z+2=0.$$

2. Soit K, L, M les points d'affixes respectives

$$z_{\text{K}}=1+\text{i} \quad ; \quad z_{\text{L}}=1-\text{i} \quad ; \quad z_{\text{M}}=-\text{i}\sqrt{3}.$$

Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

Unité graphique : 4 cm. On complètera la figure dans les questions suivantes.

3. **a.** On appelle N le symétrique du point M par rapport au point L. Vérifier que l'affixe z_{N} du point N est : $2+\text{i}\left(\sqrt{3}-2\right)$.

   b. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ transforme le point M en le point A et le point N en le point C. Déterminer les affixes respectives z_{A} et z_{C} des points A et C.

   c. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe 2i transforme le point M en le point D et le point N en le point B.
   Déterminer les affixes respectives z_{D} et z_{B} des points D et B.

4. **a.** Montrer que le point K est le milieu des segments [DB] et [AC].

   b. Montrer que : $\dfrac{z_{\text{C}}-z_{\text{K}}}{z_{\text{B}}-z_{\text{K}}}=\text{i}$.

   c. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

L' objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,\text{d}x \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,\text{d}x \quad ; \quad K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\text{d}x.$$

1. Calcul de I
   Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

   a. Calculer la dérivée de la fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+2}$.

   b. En déduire la dérivée f' de f.

   c. Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et de K

   a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : $J+2I=K$.

   b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que : $K=\sqrt{3}-J$.

   c. En déduire les valeurs de J et de K.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et, pour } n \geqslant 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. **a.** Soit f la fonction numérique définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0.

b. Calculer u_1.

2. **a.** Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$ on a :

$$1 \leqslant \sqrt{1+x^2} \leqslant \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad (1)$$

Déterminer la limite de (u_n).

3. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$.
Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 3$ on a :

$$(2n-1)u_n \leqslant \sqrt{2}. \qquad (2)$$

c. À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLÈME **11 points**

L'objectif est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentant la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle, puis d'étudier la configuration obtenue.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, unité graphique 1 cm.
On note :
Γ et C les courbes d'équations respectives : $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \ln x$;
T_a la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse a, a étant un nombre réel.
D_λ est la tangente à la courbe C au point K d'abscisse λ, λ étant un nombre réel strictement positif.

Partie A

Dans cette partie, on cherche le lien entre des droites, tangentes aux deux courbes Γ et C et qui sont parallèles; puis à quelle condition une droite tangente à la courbe Γ est également tangente à la courbe C.

1. **a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite T_a.
Déterminer de même une équation cartésienne de la droite D_λ.

b. Déterminer λ en fonction de a pour que les droites T_a et D_λ soient parallèles.
On notera b la valeur de λ ainsi obtenue, B le point de la courbe C d'abscisse b et D_b la tangente correspondante.

2. Montrer que les droites T_a et D_b sont confondues si et seulement si :

$$b = \mathrm{e}^{-a} \quad \text{et} \quad (a+1)\mathrm{e}^{-a} = a - 1.$$

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier les solutions de l'équation :

$$(1) \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie pour tout nombre réel x, $x \neq -1$, par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}\mathrm{e}^{x}$.

1. a. Montrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$.

b. Étudier les variations de f sur $\mathrm{I} = [0\ ;\ +\infty[$ et la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet, dans I, une solution unique μ, et que μ appartient à l'intervalle $[1{,}5\ ;\ 1{,}6]$.

2. a. Pour tout nombre réel x, différent de 1 et de -1, calculer le produit
$f(x) \times f(-x)$.

b. Déduire des questions précédentes que l'équation (1) admet deux solutions opposées.

c. Déterminer les tangentes communes aux courbes Γ et C.

d. Tracer dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ les courbes Γ et C. On rappelle que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Tracer également les tangentes communes T_μ et $T_{-\mu}$.
On prendra pour μ la valeur approchée $1{,}55$.

Partie C

Étude géométrique du problème

On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, y non nul, associe le point M' de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ avec

$$x' = -x \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{y}.$$

1. Déterminer $S(M')$. Montrer que, si le point M appartient à la courbe Γ, alors le point M' appartient aussi à la courbe Γ.

2. Soit A le point d'abscisse μ (μ étant le réel défini à la partie B. 1. c.) de la courbe Γ ; T_μ, est donc tangente à la courbe Γ au point A et tangente à la courbe C au point B d'abscisse $\mathrm{e}^{-\mu}$.

a. Déterminer en fonction de μ les coordonnées de $A' = S(A)$.

b. Vérifier que la droite $T_{-\mu}$ est tangente à la courbe Γ au point A' et qu'elle est aussi tangente à la courbe C en un point B_1, dont on donnera les coordonnées en fonction de μ.
Compléter la figure en plaçant les points A, B_1, A' et B.

3. a. Justifier les coordonnées suivantes :

$$A\left(\mu\ ;\ \frac{\mu+1}{\mu-1}\right) \quad ; \quad B\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\ ;\ -\mu\right)$$

$$A'\left(-\mu\ ;\ \frac{\mu-1}{\mu+1}\right) \quad \text{et} \quad B_1\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}\ ;\ \mu\right).$$

b. En déduire que les droites T_μ et $T_{-\mu}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Déterminer la nature du quadrilatère AB_1BA'.

4. Montrer que l'aire du domaine limité par le segment $[AA']$ et l'arc de la courbe Γ d'extrémités A et A' est égale à 2μ. On admettra que cet arc est situé en dessous du segment $[AA']$.