Bac métropole série S - 1995

Exercice 1

1. On cherche à résoudre $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$
Le discriminant étant négatif, les 2 solutions vont être complexes :

$z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i$

$\boxed{\text{Donc les solutions de } z^2 - 2z + 2 = 0 \text{ sont } z_1 = 1 + i \text{ et } z_2 = 1 - i}$

2. Le dessin sera ajouté à la question suivante.
3.
a. Par définition de N, on a $z_L - z_M = z_N - z_L$
Or, $z_L - z_M = 1 - i + i\sqrt{3} = 1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$

D'où, $z_N = 1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right) + 1 - i$

$\boxed{\text{Ce qui confirme } z_N = 2 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)}$

b. La rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ correspond à une multiplication des affixes par i.

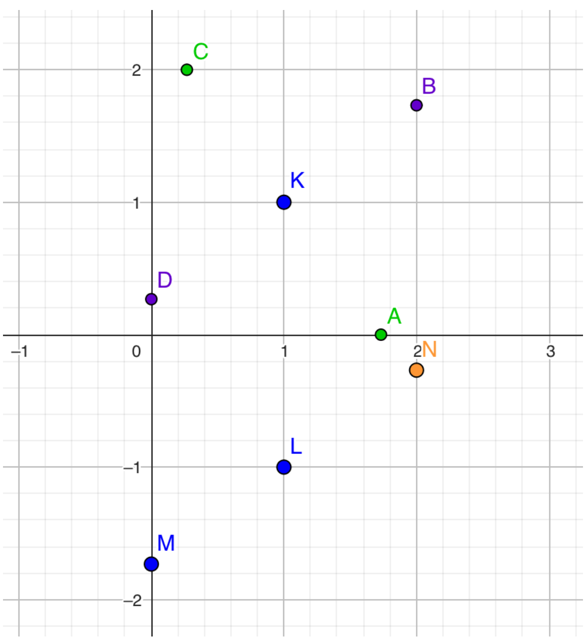
$\boxed{\text{Donc } z_A = i z_M = \sqrt{3}}$

$\boxed{\text{Et } z_C = i z_N = 2 - \sqrt{3} + 2i}$

c. La translation de vecteur $\vec{u}$ correspond à une addition de $2i$ aux affixes.

$\boxed{\text{Ce qui donne } z_D = z_M + 2i = i\left(2 - \sqrt{3}\right)}$

$\boxed{\text{Et } z_B = z_N + 2i = 2 + i\sqrt{3}}$



4.

a. La propriété des milieux dans le plan complexe nous indique qu'il faut prouver $z_K = \frac{z_D + z_B}{2} = \frac{z_C + z_A}{2}$

Or $\frac{z_C + z_A}{2} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2i + \sqrt{3}}{2} = 1 + i = z_K$

Et $\frac{z_D + z_B}{2} = \frac{i\left(2 - \sqrt{3}\right) + 2 + i\sqrt{3}}{2} = 1 + i = z_K$

Donc K est le milieu de $\left[AC\right]$ et $[BD]$.

b. $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2i - 1 - i}{2 + i\sqrt{3} - 1 - i} = \frac{1 - \sqrt{3} + i}{1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)} = \frac{i\left(1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)\right)}{1 + i\left(\sqrt{3} - 1\right)} = i$

Et donc $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$

c. Le résultat précédent nous indique que (CK) et (BK) sont orthogonales.
$ABCD$ a donc ses diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu.
De plus, on déduit également de la question précédente que $KB = KC$ et donc que les diagonales sont de même longueur.

Finalement $ABCD$ est un carré.

Exercice 2
Enseignement obligatoire

1.

a. Nommons h la fonction intermédiaire $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$
Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2 > 0$, h est bien définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

b. $\forall x \in \left[0,1\right],\ x + \sqrt{x^2 + 2} > 0$, donc f est bien définie sur l'intervalle.

$$\forall x \in \left[0,1\right],\ f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + 2}\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right)}$$

Donc $\forall x \in \left[0,1\right],\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$

c. En utilisant le résultat précédente, on peut écrire :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \left[ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right)\right]_0^1 = ln\left(1 + \sqrt{3}\right) - ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$$\boxed{\text{Et donc } I = ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}$$

2.

a. $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx + 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx = K$

$$\boxed{\text{Ainsi } J + 2I = K}$$

b. Procédons comme proposé à une intégration par partie, dans laquelle nous allons dériver $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ et primitiver $x \mapsto 1$.

Ce qui donne : $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx.$

$$\boxed{\text{Et donc } K = \sqrt{3} - J.}$$

c. En sommant les 2 égalités précédentes, on déduit :
$2K = \sqrt{3} + 2I$

$$\boxed{\text{Et donc } K = \frac{\sqrt{3}}{2} + ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\boxed{\text{Et } J = ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Exercice 2

Spécialité

1.

a. <u>*Remarque :*</u> *évidemment, normalement on ne fait qu'un des 2 exercices. On ne revient pas sur le domaine de définition ou la dérivabilité ici. On reprend juste le résultat (la constante sous la racine ne changeant pas le principe). Idem pour la question b)*

$$\boxed{\text{On trouve : } \forall x \in [0,1],\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

D'après le calcul proposé dans l'exercice précédent, on a : $\boxed{u_0 = ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$

b. $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. On reconnaît, à l'intérieur de l'intégrale, une dérivée de forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ dont une primitive sera $\sqrt{u}$.

Cela nous donne : $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - 1.$

$$\boxed{u_1 = \sqrt{2} - 1}$$

2.

a. Étudions les variations de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Or, $\forall x \in [0,1],\ x-1 \leqslant 0$ et donc $\dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant 0$.

Finalement, cela confirme que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Comme inversement, $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.

Donc $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée.

Ceci permet de conclure que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

b. $\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ ou $1 \leqslant x^2+1 \leqslant 2$

En passant à la racine carrée qui est bien une fonction croissante : $\forall x \in [0,1],\ 1 \leqslant \sqrt{x^2+1} \leqslant \sqrt{2}$

En passant cette fois à l'inverse, qui est décroissante, $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant 1$.

Cet encadrement permet de déduire un encadrement de u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^n dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx \leqslant \int_0^1 x^n dx$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$,

On obtient bien $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque : ce résultat n'est pas surprenant, quand $n \to +\infty$, $x \mapsto x^n$ tend vers la fonction nulle sur $[0,1[$ et vaut 1 en 1. C'est d'ailleurs un exemple classique d'une suite de fonctions continues dont la limite ne l'est pas.

3.

a. $\displaystyle\forall n \geqslant 3,\ u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}\,dx$

Ce qui vérifie : $\forall n \geqslant 3,\ u_n + u_{n-2} = I_n$

Comme proposé dans l'énoncé, intégrons I_n par parties en primitivant le 1er membre et dérivant le second. Ca semble assez naturel car on « cherche » du $\sqrt{x^2+1}$ au dénominateur et on souhaite « augmenter » les puissances de x.

$$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{n-1}\left[x^{n-1}\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n-1}\int_0^1 x^{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{u_n}{n-1}$$

Et avec la question précédente, $u_n + u_{n-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n-1} - \dfrac{u_n}{n-1}$

Finalement, on trouve bien : $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

b. On sait que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, donc $\forall n \geqslant 3,\ u_n \leqslant u_{n-2}$.

Le résultat demandé se déduit de l'égalité précédente : $\forall n \geqslant 3,\ (2n-1)u_n \leqslant \sqrt{2}$

c. On étudie le comportement en $+\infty$, on ne précisera pas les indices pour lesquels les inégalités sont valables, on sait qu'on étudie un n « assez grand » pour que ça ne soit pas une préoccupation.

Commençons par utiliser l'inégalité 2, elle nous donne :

$2nu_n \leqslant \sqrt{2} + \dfrac{1}{n+1}$ ou $nu_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2(n+1)}$

L'inégalité 1, de son côté, nous indique (pour la partie gauche) : $\dfrac{n}{(n+1)\sqrt{2}} \leqslant nu_n$

On a donc encadré nu_n par 2 quantités qui ont la même limite en $+\infty$.

On conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Problème :

Partie A

1.

a. *<u>Remarque :</u> je ne reviens pas sur la démonstration ici, je pense que c'est un résultat connu du cours, encore aujourd'hui. Si besoin, on peut retrouver le résultat rapidement, on connaît le coefficient directeur de la droite et un de ses points.*

Une équation cartésienne de T_a est $y = e^a(x-a) + e^a$

De même, une équation cartésienne de D_λ est $y = \dfrac{1}{\lambda}(x-\lambda) + ln(\lambda)$

b. 2 droites sont parallèles (ou confondues) si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

D'après la question précédente, cela revient à $e^a = \dfrac{1}{\lambda}$.

Donc $T_a // D_\lambda \Leftrightarrow \lambda = e^{-a}$

2. La première condition $b = e^{-a}$ et une réécriture du résultat précédent.

On veut que les droites soient confondues, donc qu'elles aient la même ordonnée pour toutes abscisses, en particulier quand $x = 0$.
En remplaçant x et λ dans la première question par 0 et e^{-a}, on trouve : $-ae^{a} + e^{a} = -1 - a$.
Ceci se réécrit bien $(a+1)\,e^{-a} = a - 1$.

Et donc T_a et D_b sont confondues si et seulement si $b = e^{-a}$ et $(a+1)\,e^{-a} = a-1$.

Partie B

1.

a. $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1}e^{x} = 1$. Donc en divisant par e^{x} qui est forcément non nul, on trouve :

$f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$

b. f est bien définie et dérivable sur $\left[0, +\infty\right[$ comme produit de fonctions qui le sont.

On a donc
$\forall x \in \left[0, +\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{x-1}{x+1}e^{x} + \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2}e^{x} = \dfrac{e^{x}}{(x+1)^2}\left(x^2 - 1 + 2\right) = \dfrac{e^{x}}{(x+1)^2}\left(x^2+1\right) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $\left[0, +\infty\right[$.

Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{x-1}{x+1} \to 1$ (je considère qu'il n'y a pas besoin d'insister, en cas de doute, on met x en facteur au numérateur et au dénominateur) et $e^{x} \to +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c. En complément des éléments de la question précédente, on a $f(0) = -1$.

On en conclut que f est une bijection de $\left[0, +\infty\right[$ vers $\left[-1, +\infty\right[$.

Ce qui permet d'affirmer que $f(x) = 1$ admet une unique solution μ sur $\left[0, +\infty\right[$.

De plus : $f\left(1{,}5\right) \simeq 0{,}9$ et $f\left(1{,}6\right) \simeq 1{,}14$.

Donc $\mu \in \left[1{,}5 ; 1{,}6\right]$

2.

a. $\forall x \notin \{-1{,}1\},\ f(x) \times f(-x) = \dfrac{x-1}{x+1}e^{x} \times \dfrac{-x-1}{-x+1}e^{-x} = 1$

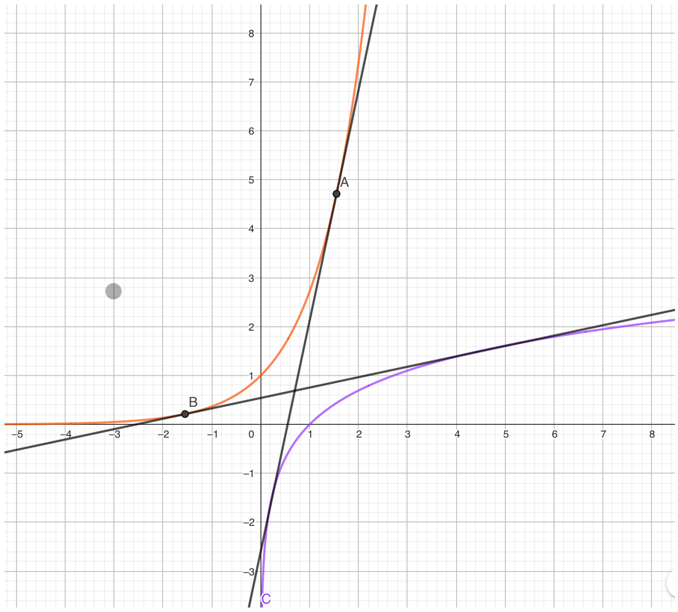
b. On déduit donc que si $f(x) = 1, f(-x)$ également.
Comme cette condition est équivalente à « x est solution de (1) », et qu'on a identifié une solution μ.

on conclut que (1) possède 2 solutions opposées.

c. D'après la question 2 de la partie A, les tangentes communes à C et Γ sont les T_a où a vérifie (1)

D'après la question précédente, les 2 tangentes communes à C et Γ sont T_{μ} et $T_{-\mu}$.

d.



Partie C

1.

Considérons $M''(x'', y'') = S(M')$:

Par définition de S : $x'' = -x' = x$ et $y'' = \dfrac{1}{y'} = y$

$\boxed{\text{Et finalement } S(M') = M}$

Si $M \in \Gamma, y = e^{x}$ et donc les coordonnées de M' sont $x' = -x$ et $y' = \dfrac{1}{y} = e^{-x}$.

Donc $M'\left(-x, e^{-x}\right) \in \Gamma$

$\boxed{\text{Donc Si } M \in \Gamma,\ M' \in \Gamma}$

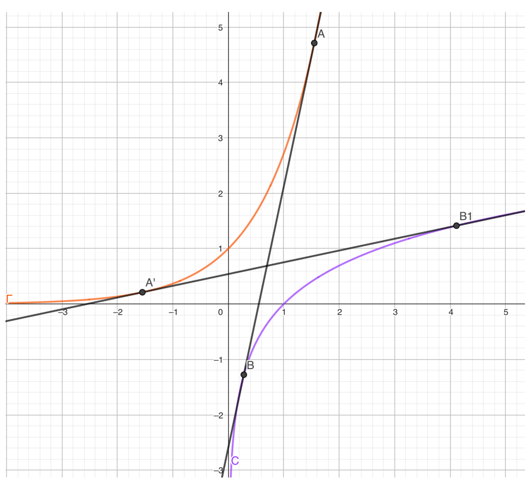
2.

a. On a $A\left(\mu, e^{\mu}\right)$. Les coordonnées de $\boxed{A' \text{ sont donc } A'\left(-\mu, e^{-\mu}\right)}$

b. Par définition de $T_{-\mu}$ et d'après les coordonnées de $A'\left(-\mu, e^{-\mu}\right)$ calculées précédemment, on a bien

$\boxed{T_{-\mu} \text{ est la tangente à } \Gamma \text{ en } A'.}$

En utilisant la question A .2. et la B.2.c, $T_{-\mu}$ est tangente à C en $B_1(e^{\mu}, \mu)$



©antoine.remond.maths@gmail.com

3.

a. On sait que les coordonnées de A sont $A(\mu, e^{\mu})$ par définition de ce point.

Et d'après B.1.a. $e^{-\mu} = \dfrac{\mu - 1}{\mu + 1}$ ou $e^{\mu} = \dfrac{\mu + 1}{\mu - 1}$.

Donc $A\left(\mu, \dfrac{\mu + 1}{\mu - 1}\right)$

Les coordonnées de A' s'obtiennent de la même manière et $A'\left(-\mu, \dfrac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)$.

Ensuite, on sait que $B\left(e^{-\mu}, -\mu\right)$ et donc $B\left(\dfrac{\mu - 1}{\mu + 1}, -\mu\right)$

Finalement, les coordonnées de B_1 sont $\left(e^{\mu}, \mu\right)$ ou $B_1\left(\dfrac{\mu + 1}{\mu - 1}, \mu\right)$

b. D'après la question précédente et les coordonnées des 4 points, B est symétrique de A' par rapport à $y = x$ et A est symétrique de B_1.

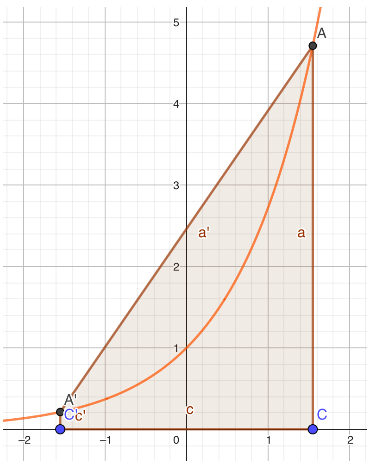
Rappel : l'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite, donc l'image de 2 points suffit à trouver l'image d'une droite.

Et donc T_{μ} et $T_{-\mu}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

D'après les symétries qui viennent d'être mises en avant, $(A'B)$ et (AB_1) sont perpendiculaires à la droite d'équation $y = x$ et sont donc parallèles.

Ainsi $A'AB_1B$ est un trapèze.

4. Introduisons les points $C'(-\mu, 0)$ et $C(\mu, 0)$:



On doit calculer la différence entre l'aire du quadrilatère $ACC'A'$ et l'aire sous la courbe Γ (qui sera donné par l'intégrale de l'exponentielle entre $-\mu$ et μ. On écrira $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2$

On peut découper $ACC'A'$ en 1 rectangle et un triangle rectangle.

$$\mathscr{A}_1 = 2\mu e^{-\mu} + \frac{2\mu\left(e^{\mu} - e^{-\mu}\right)}{2} = \mu\left(e^{\mu} + e^{-\mu}\right)$$

$$\mathscr{A}_2 = \int_{-\mu}^{\mu} e^x dx = \left[e^x\right]_{-\mu}^{\mu} = e^{\mu} - e^{-\mu}$$

Donc $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 = \mu\left(e^{\mu} + e^{-\mu}\right) - e^{\mu} + e^{-\mu} = e^{\mu}\left(\mu - 1\right) + e^{-\mu}\left(\mu + 1\right)$
$= \dfrac{\mu + 1}{\mu - 1}\left(\mu - 1\right) + \dfrac{\mu - 1}{\mu + 1}\left(\mu + 1\right) = 2\mu.$

$\boxed{\text{On conclut donc } \mathscr{A} = 2\mu}$