Baccalauréat C Amiens juin 1978

EXERCICE 1 **3 POINTS**

1. Soit U et V deux applications, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$, qui, à tout entier naturel n, associent respectivement U_n et V_n définis par

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{lcr} U_{n+1} & = & \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)U_n + 3 \\ V_n & = & U_n - \mathrm{i}\sqrt{3}. \end{array} \right.$$

Calculer V_0. Déterminer une relation entre V_{n+1} et V_n. En déduire en fonction de n l'expression de V_n, puis celle de U_n pour tout entier naturel n.

2. Le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.
On considère l'application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M, d'affixe z, associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que

$$z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 3.$$

On pose $f^1 = f$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, \quad f^{n+1} = f \circ f^n$.
Quelle est la nature géométrique de f, ainsi que celle de f^n ?
Soit $M_n = f^n(M)$; déterminer l'affixe z_n de M_n.

3. Soit A_0 le point de $\mathscr{P}$ d'affixe 1, déterminer l'affixe de A_n.
Comparer le résultat obtenu à la valeur de U_n. Expliquer.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un vendeur de journaux a, chaque semaine, entre zéro et cinq clients pour une revue hebdomadaire.
Soit $\mathrm{E} = \{A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5\}$, où A_n désigne l'évènement « il y a eu n clients pour la revue ».
$(\mathrm{E},\ \mathscr{P}(\mathrm{E}))$ est muni de la probabilité P définie par

$$P(A_0) = P(A_5) = \frac{1}{32}, \quad P(A_1) = P(A_4) = \frac{5}{32}, \quad P(A_2) = P(A_3) = \frac{10}{32}.$$

Le vendeur gagne trois francs par exemplaire vendu et perd un franc en frais divers par exemplaire invendu.
Dans le cas où il a commandé p exemplaires $(1 \leqslant p \leqslant 5)$, on définit sur $(\mathrm{E},\ \mathscr{P}(\mathrm{E}))$ la variable aléatoire réelle G_P par : $G_P(A_n)$ est son gain (positif ou négatif) lorsque n clients se sont présentés dans la semaine $(0 \leqslant n \leqslant 5)$.

1. Calculer $G_P(A_n)$, pour tout $p \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ et $n \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.
(On peut disposer les résultats sous forme de tableau.)
2. Calculer les espérances mathématiques suivantes :

$$\mathrm{E}(A_1),\ \mathrm{E}(A_2),\ \mathrm{E}(A_3),\ \mathrm{E}(A_4),\ \mathrm{E}(A_5).$$

Que peut-on faire à la place du vendeur ?

PROBLÈME **12 POINTS**

On désigne par $(\mathrm{E},\ +,\ \cdot)$ l'espace vectoriel réel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et par f_1, f_2 et f_3 trois éléments de E tels que

$$\begin{cases} f_1(0) &= f_2(0) = f_3(0) = 0 \\ f_1(x) &= x^2 \mathrm{Log}\,|x|, \\ f_2(x) &= \left(x^2+1\right)\mathrm{Log}\,|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^\star \\ f_3(x) &= x\mathrm{Log}\,|x|, \end{cases}$$

Soit $L = \left\{f \in \mathrm{E}/\exists(a, b, c) : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \text{ et } f = af_1 + bf_2 + cf_3\right\}$.

Partie A

1. Montrer que $(L, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ de base $\mathscr{B} = \left(f_1, f_2, f_3\right)$.

2. Soit P l'ensemble des applications paires de L et I l'ensemble des applications impaires de L. Montrer que P est le plan de base $\left(f_1, f_2\right)$ et I est la droite de base $\left(f_3\right)$.

3. Soit φ l'application de L^2 dans $\mathbb{R}$ telle que, si f et g ont respectivement pour coordonnées $(a ; b ; c)$ et $\left(a' ; b' ; c'\right)$ par rapport à $\mathscr{B}$,

$$\varphi(f ; g) = aa' + 2bb' + cc' + \left(ab' + ba'\right).$$

Montrer que φ est un produit scalaire défini sur L.
Montrer que P et I sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux.
Déterminer f_4 de façon que $\left(f_1, f_4, f_3\right)$ soit une base orthonormée de L.

Partie B

1. Soit h l'application de $\mathbb{R}^\star - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$h(x) = \frac{x+1}{2x+1} + \mathrm{Log}\,|x|.$$

a. Étudier les variations de h. Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de h dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On ne demande pas de construire $(\mathscr{C})$).

b. Montrer que $(\mathscr{C})$ coupe l'axe $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}\right)$ en trois points d'abscisses α, β et γ telles que $\alpha < \beta < \gamma$.
Vérifier que :

$$-1 \leqslant \alpha < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4} < \beta < -\frac{1}{8} \quad \text{et} \quad \frac{3}{8} < \gamma < \frac{1}{2}.$$

c. En déduire le signe de $h(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}^\star - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

2. Soit $f_5 = f_1 + f_3$. Étudier f_5 (continuité, dérivabilité, sens de variation, limites). Construire sa courbe représentative (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$.
[On pourra utiliser le signe de $h(x)$ pour déterminer celui de $f_5'(x)$.

3. Soit F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$F(x) = \int_1^x f_5(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence et la continuité de F. Calculer $F(x)$ pour tout x élément de Rt. En déduire la valeur de $F(0)$.

Partie C

Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$g(0) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{\star},\ g(x) = -2\left(x^2 - x\right)\mathrm{Log}|x|.$$

On considère l'espace vectoriel euclidien L, muni de la base orthonormée $\left(f_1,\ f_4,\ f_3\right)$.

1. Montrer que g est élément de L.
2. Soit S la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à P.
   Montrer que $\mathrm{S}(g)$ appartient à la droite vectorielle engendrée par f_5.
   En déduire le sens de variation de $\mathrm{S}(g)$.
3. Construire la courbe (Γ') représentative de $\mathrm{S}(g)$.
4. Calculer l'aire, $\mathscr{A}$, de la portion de plan comprise entre (Γ), (Γ') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.