

Université Paris II, Panthéon-Assas.

Test d'admission en 2ième année collège d'économie, filière analyse économique, 2022.

Test de mathématiques:06/09/2022

**Calculatrice et documents interdits.**

**Exercice 1.** (8 pts) Considérons la suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de terme général défini par:

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2}{1+k}, n \in \mathbb{N}.$$

1. Étudier les suites dont les termes sont  $u_{2n}$ ,  $u_{2n+1}$  et  $w_n = u_{2n} - u_{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire la nature de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} dx, n \in \mathbb{N},$$

tend vers 0.

*ind.* Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\frac{1}{1+x} \leq 1$ .

4. En vous aidant d'une somme de termes successifs d'une suite géométrique, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ ,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

5. En déduire que  $\frac{u_n}{2} + I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ .

6. En déduire la limite de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 2.** (8 pts) Soit la fonction

$$f(x) = -\frac{x}{e^x}.$$

- 1) Étudier  $f$  (domaine de définition, limites aux bords, variations, extrémums).
- 2) Combien de solution l'équation  $f(x) = 1$  possède-t-elle sur  $\mathbb{R}$ ?
- 3) Résoudre l'équation  $f''(x) = 0$ . Que représente la solution (les solutions) de cette équation?
- 4) Montrer qu'il existe un unique  $c \in ]0, 1[$ , tel que

$$(c-1)e^{-c} = \frac{1}{e}.$$

- 5) Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

**Exercice 3.** (4 pts)

- 1) Donner la limite  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ .

- 2) Donner un DL (en 0) d'ordre 2 de  $\frac{\ln(1+x)}{e^x}$ .