

Université Paris II, Panthéon-Assas.

Test d'admission en 2ième année collège d'économie, filière analyse économique, 2022.

Test de mathématiques: 06/09/2022

Calculatrice et documents interdits.

Exercice 1. (8 pts) Considérons la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général défini par:

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2}{1+k}, n \in \mathbb{N}.$$

1. Étudier les suites dont les termes sont u_{2n} , u_{2n+1} et $w_n = u_{2n} - u_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la nature de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} dx, n \in \mathbb{N},$$

tend vers 0.

ind. Pour tout $x \in [0, 1]$, $\frac{1}{1+x} \leq 1$.

4. En vous aidant d'une somme de termes successifs d'une suite géométrique, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}.$$

5. En déduire que $\frac{u_n}{2} + I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.

6. En déduire la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2. (8 pts) Soit la fonction

$$f(x) = -\frac{x}{e^x}.$$

- 1) Étudier f (domaine de définition, limites aux bords, variations, extréums).
- 2) Combien de solution l'équation $f(x) = 1$ possède-t-elle sur \mathbb{R} ?
- 3) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Que représente la solution (les solutions) de cette équation?
- 4) Montrer qu'il existe un unique $c \in]0, 1[$, tel que

$$(c-1)e^{-c} = \frac{1}{e}.$$

- 5) Calculer l'intégrale

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Exercice 3. (4 pts)

- 1) Donner la limite $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
- 2) Donner un DL (en 0) d'ordre 2 de $\frac{\ln(1+x)}{e^x}$.