Test d'admission en 2ème année collège d'économie

Exercice 1 :

Nous allons étudier la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2}{1+k}$

1. $u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{2}{1+k} = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+2k} - \frac{1}{1+\left(2k+1\right)}\right) + \frac{2}{2n+2}$

$= 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(2k+1\right)\left(2k+2\right)} + \frac{1}{n+1}$

$u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \frac{2}{1+k} = 2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+2k} - \frac{1}{1+\left(2k+1\right)}\right) = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(2k+1\right)\left(2k+2\right)}$

On observe que le terme générique vérifie : $\frac{1}{\left(2k+1\right)\left(2k+2\right)} \leqslant \frac{1}{4k^2}$ dont la série converge.

$w_n = u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{1}{n+1}$

On peut donc conclure que les 3 suites $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

2. Les 3 suites de la questions précédentes permettent de conclure que les 2 sous-suites de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(u_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Et finalement $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

<u>Remarque :</u> on vérifie là le critère de convergence des séries alternées.

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x} dx$

$\left|I_n\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x} dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}\, x^{n+1}}{1+x}\right| dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1} dx$ (d'après le rappel indiqué dans le sujet).

Et $\int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}\left[x^{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$

Ce qui justifie $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

4. Considérons la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-x$.

On peut donc écrire : $\sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$

Ce qu'on peut reformuler $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$

5. Par linéarité de l'intégration, on peut intégrer l'égalité précédente entre 0 et 1.

En notant que $\int_0^1 (-1)^k x^k dx = \frac{(-1)^k}{k+1} \left[x^{k+1}\right]_0^1 = \frac{(-1)^k}{k+1}$, on trouve que $\int_0^1 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n dx = \frac{u_n}{2}$.

Et finalement : $\frac{u_n}{2} + I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

6. Comme $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = ln(2)$, en prenant en compte le résultat de la question 3,

On conclut $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2ln(2)$

Exercice 2 :

On étudie la fonction $f(x) = -\frac{x}{e^x}$

1. Comme la fonction exponentielle est strictement positive, f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle y est également dérivable comme quotient de fonctions qui le sont.

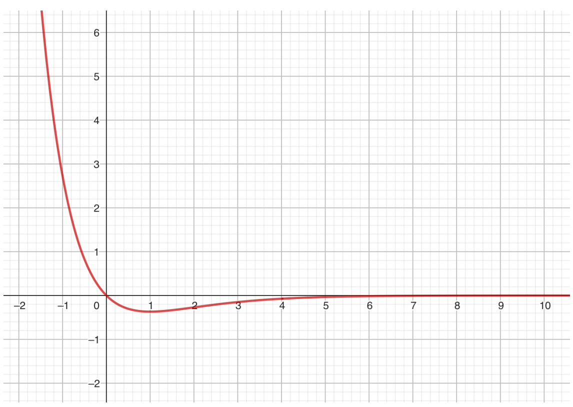
De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{x-1}{e^x}$

f' est donc du signe de $x - 1$.

Donc f est décroissante sur $]-\infty, 1]$, puis croissante sur $[1, +\infty[$, avec un minimum en $\left(1; -\frac{1}{e}\right)$

De plus, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Et par croissance comparée, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$



©antoine.remond.maths@gmail.com

Désolé, je n'arrive toujours pas à faire proprement un tableau de variations !

2. Les variations étudiées dans la question précédente nous permet d'affirmer que

L'équation $f(x) = 1$ possède une seule solution (et la solution est dans $\mathbb{R}_-$)

3. On a vu dans la première question que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{x-1}{e^x}$, qui est également bien dérivable.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$$

Donc $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

L'annulation de la dérivée seconde correspond à un point d'inflexion de la courbe, ie. la tangente en ce point traverse la courbe.
De plus, f est convexe pour $x \leqslant 2$, puis concave.

4. On sait que $f(0) = 0$ et $f(1) = -\dfrac{1}{e}$.

D'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in \left]0,1\right[,\ f'(c) = f(1) - f(0) = -\dfrac{1}{e}$

Et donc, $\exists c \in \left]0,1\right[,\ (c-1)e^{-c} = -\dfrac{1}{e}$.

<u>Remarque :</u> il manque manifestement un « - » dans l'énoncé. On a vu en particulier que la dérivée de f était négative sur l'intervalle considéré.

5. Procédons par intégration par parties :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -xe^{-x}dx = \left[xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx = \frac{1}{e} + \left[e^{-x}\right]_0^1 = \frac{2}{e} - 1$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{e} - 1$.

Exercice 3 :

1. $(1+x)^{\frac{1}{x}} = exp\left(\dfrac{1}{x}ln(1+x)\right)$

Or $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}ln(1+x) = 1$ car on reconnaît le taux d'accroissement de la fonction $ln(1+x)$ en 0.

Et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

<u>Remarque :</u> On retrouve un résultat connu en posant $X = \dfrac{1}{x}$, qui tend alors vers $+\infty$.

2. On pose $\forall x \in \left]-1,+\infty\right[,\ f(x)=\dfrac{ln(1+x)}{e^x}$, donc $f(0)=0$.

Sur cet intervalle, $f'(x)=\dfrac{\frac{e^x}{1+x}-e^x ln(1+x)}{e^{2x}}=\dfrac{1-(1+x)\,ln(1+x)}{e^x}$

Et $f''(x)=\dfrac{-e^x\left(ln(1+x)+1\right)+e^x(1+x)\,ln(1+x)}{e^{2x}}=\dfrac{x\,ln(1+x)-1}{e^x}$

On a donc au voisinage de $0, f(x)=\dfrac{1}{e}x-\dfrac{1}{e}x^2+o\left(x^2\right)$.