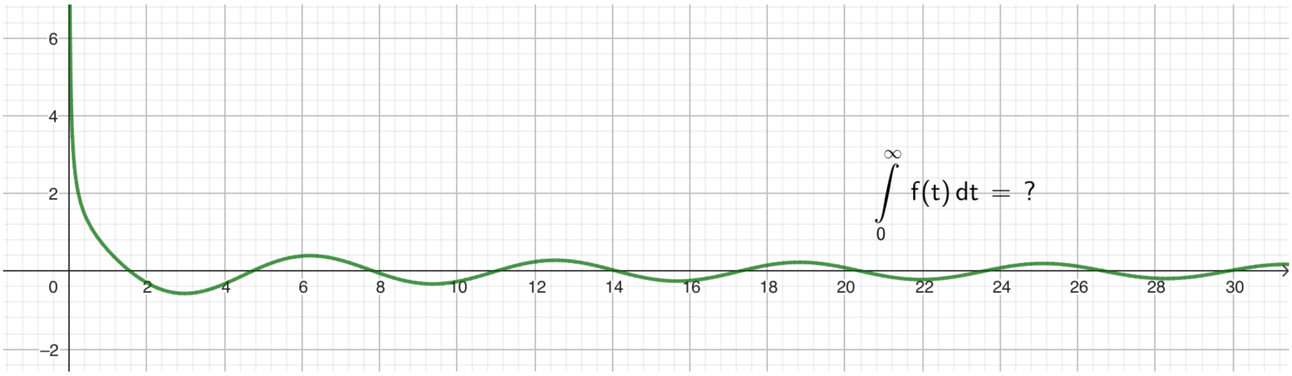
LM250 - Partiel 2012

Exercice 1 :

Il faut étudier les 2 bornes de l'intégrale, car la fonction diverge en 0 et on doit étudier le comportement en $+\infty$.



En 0 :

On considère $I_\epsilon = \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ (on prend $\frac{\pi}{2}$ comme borne supérieur car le cosinus est positif sur l'intervalle considéré).

$I_\epsilon = \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(t)}{\sqrt{t}} dt \leqslant \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\epsilon}\right)$

Donc I_ϵ converge bien quand ϵ tend vers 0.

En $+\infty$:

Utilisons cette fois

$I_X = \int_{\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{cos(t)}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{sin(t)}{\sqrt{t}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{X} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{2sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{sin(X)}{\sqrt{X}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{2sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$

(<u>Remarque :</u> la borne inférieure n'a pas d'importance, j'avais pris $\frac{\pi}{2}$ dans la première partie car c'était un point d'annulation de la fonction, j'ai gardé cette borne. N'importe quel autre réel convient pour cette 2ème partie. Pour la première on pouvait prendre n'importe quel réel plus petit que $\frac{\pi}{2}$ pour garder le raisonnement).

Quand $X \to +\infty$, $\frac{sin(X)}{\sqrt{X}} \to 0$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{X} \frac{2sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ est absolument convergente.

Finalement, on conclut que $I = \int_0^{+\infty} \frac{cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ est semi-convergente.

Exercice 2 :

1. $u_n = I_n + I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{2n}(t)\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{2(n+1)}(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tan^{2n}(t)\left(1 + tan^2(t)\right)dt$

(<u>Rappel :</u> $tan' = 1 + tan^2$)

$$u_n = \frac{1}{2n+1}\left[tan^{2n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2n+1}}$$

2. La suite de terme général $\frac{(-1)^k}{2k+1}$ remplit les conditions du théorèmes d'Abel :

(i) La suite de terme général $\frac{1}{2k+1}$ est une suite de réels décroissante

(ii) Sa limite est 0

(iii) $\left|\sum (-1)^k\right| \leqslant 1$

<u>Rappel :</u> les suites décroissantes alternées sont des cas particuliers usuels de ce théorème.

$$\boxed{\text{Donc } \sum (-1)^n u_n \text{ converge}}$$

3. Par définition de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ est une somme téléscopique.

On trouve immédiatement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = I_0 + (-1)^n I_{n+1}}$

4. Sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$, $tan(t) < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

De plus $I_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 3 :

1. J_α est bien définie en 0, il faut étudier le comportement en $+\infty$

Or $\forall a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{1+\pi^\alpha t^2} \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\pi^\alpha t^2} = \frac{1}{3a^3\pi^\alpha}$.

$$\boxed{\text{Donc } J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\pi^\alpha t^2} \text{ converge.}}$$

2. $n^{\frac{\alpha}{2}} w_n = n^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi)^{\alpha} t^2}$

Comme proposé, on pose $u = n^{\frac{\alpha}{2}} t$ d'où $du = n^{\frac{\alpha}{2}} dt$

$$n^{\frac{\alpha}{2}} w_n = n^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^{n^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (n\pi)^{\alpha} \frac{u^2}{n^{\alpha}}} \frac{du}{n^{\frac{\alpha}{2}}} = \int_0^{n^{\frac{\alpha}{2}}\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \pi^{\alpha} u^2}$$

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{\alpha}{2}} w_n = J_{\alpha}}$$

3. Par la relation de Chasles on a $\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^{\alpha} sin^2(t)}$

Et $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^{\alpha} sin^2(t)} = I_{\alpha}$

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \text{ et } I_{\alpha} \text{ sont de même nature.}}$$

4. $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^{\alpha} sin^2(t)}$

On pose $s = t - n\pi$ et $ds = dt$

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{ds}{1 + (s + n\pi)^{\alpha} sin^2(s + n\pi)} = \int_0^{\pi} \frac{ds}{1 + (s + n\pi)^{\alpha} sin^2(s)}$$

Sur $[0;\pi]$, $\forall n \in \mathbb{N},\ (n\pi)^{\alpha} \leqslant (s + n\pi)^{\alpha} \leqslant \left((n+1)\pi\right)^{\alpha}$, donc
$\int_0^{\pi} \frac{ds}{1 + \left((n+1)\pi\right)^{\alpha} sin^2(s)} \leqslant u_n \leqslant \int_0^{\pi} \frac{ds}{1 + (n\pi)^{\alpha} sin^2(s)}$

$$\boxed{\text{Ou } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant u_n \leqslant v_n}$$

5. Toutes les quantités considérées sont positives, donc soit elles tendent vers une limite l, soir elles divergent vers $+\infty$.

Étudions rapidement les différents cas :
- $\sum u_n$ diverge, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, $\sum v_n$ diverge également
- $\sum v_n$ diverge, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant u_n$, donc $\sum u_n$ diverge
- $\sum u_n$ converge vers l, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} \leqslant u_n$, $\sum v_n$ est croissante et majorée par $l + v_0$ donc converge
- $\sum v_n$ converge, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, $\sum u_n$ est croissante et majorée par l donc converge

$$\boxed{\text{Donc } \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}}$$

6. On nous indique que $\frac{v_n}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi)^{\alpha} sin^2(t)}$ et $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (n\pi)^{\alpha} t^2}$

©antoine.remond.maths@gmail.com

Et comme $\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{sin\,(t)}{t} \leqslant 1,\ \frac{2}{\pi}t \leqslant sin\,(t) \leqslant t$, on peut encadrer :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \leqslant \frac{v_n}{2} \leqslant M^2 w_n}$

(Remarque : j'ai passé une ligne de calcul sans grande valeur ajoutée, on est toujours sur le même principe d'encadrements d'inverses).

7. Comme pour la question 5, une des sommes ne peut diverger sans que l'autre diverge

$\boxed{\sum v_n \text{ et } \sum w_n \text{ sont de même nature.}}$

8. En reprenant la question 2, on a le critère de converge pour $\sum w_n$ et donc finalement de I_α :

Il faut que $J_\alpha \sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ converge et donc $\frac{\alpha}{2} > 1$

$\boxed{\text{On conclut finalement que } I_\alpha \text{ converge si } \alpha > 2.}$