Exercice n°1 **11** (1–2–8)

Préciser les singularités et déterminer la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt$.

Exercice n°2 **2 – 2 – 6 – 4**

Soit pour $n \geq 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n} t\, dt$ et $u_n = I_n + I_{n+1}$.

1/ Montrer que $\forall\, n \geq 0$, $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$

2/ Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge.

3/ Montrer que $\forall\, n \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.

4/ En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice n°3 **2 – 4 – 6 – 3 – 3 – 4 – 3 – 5**

Soit $\alpha > 0$. On note $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t} \qquad v_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 t} \qquad w_n = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha t^2}.$$

On rappelle que pour $0 < t \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2}{\pi} \leq \dfrac{\sin t}{t} \leq 1$ et on note $M = \dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\sup_{0<t\leq\pi/2} \frac{t}{\sin t}$.

Montrer les assertions suivantes:

1/ $J_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + \pi^\alpha t^2}$ converge.

2/ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha/2} w_n = J_\alpha$. $\left(\text{Poser } u = n^{\alpha/2} t\right)$

3/ $I_\alpha \stackrel{C}{\sim} \sum u_n$.

4/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq u_n \leq v_n$. $\left(\text{Dans } u_n \text{ poser } s = t - n\pi\right)$

5/ $\sum u_n \stackrel{C}{\sim} \sum v_n$.

6/ $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq \dfrac{v_n}{2} \leq M^2 w_n$. $\left(\text{On admet que } \dfrac{v_n}{2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 t}\right)$

7/ $\sum v_n \stackrel{C}{\sim} \sum w_n$.

8/ I_α converge ssi $\alpha > 2$.

(Note sur 55)/2 = Note sur 25

Voir au dos

FORMULAIRE

IPP $$\int_a^b f'(t)g(t)\ dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Fonctions trigo et puissances

$$\cos 0 = 1 \qquad (\tan X)' = 1 + (\tan X)^2 \qquad \tan(\pi/4) = 1 \qquad \int \cos x\ dx = \sin x$$

$$\forall \alpha \neq 0, \quad (X^\alpha)' = \alpha X^{\alpha-1} \qquad \forall \alpha \neq 1, \quad \int \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

RAPPELS DE COURS

Principe de comparaison. *Soit f et g définies sur un intervalle $[\,a,\,b\,]$ et telles que $|f| \leq g$. Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.*

Critère de Riemann. ■ *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f continue sur $[a, +\infty)$. Si $f(x) = O\big(x^{-\alpha}\big)$ en $+\infty$ et $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge absolument.*

■ *Soit $b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f continue sur $]0, b]$. Si $f(x) = O\big(x^{-\alpha}\big)$ dans un voisinage de 0^+ et $\alpha < 1$, alors $\int_0^b f(t)\,dt$ converge absolument.*

Pour étudier une intégrale SCV on fait une IPP en intégrant le terme oscillant.

Définition: Etant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on définit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses **sommes partielles** en posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

– La **série de terme général TG** u_n, notée $\sum u_n$ **converge** si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

– La **somme** de la série notée $\sum_0^{+\infty} u_n$ est définie par $\sum_0^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$.

Principe de comparaison. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que $|u_n| \leq v_n$ pour tout n. Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.*

Critère de Riemann *Si pour un $\alpha > 1$, $u_n = O(1/n^\alpha)$, alors $\sum u_n$ CV.*

CSA. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone tendant vers 0. Alors $\sum (-1)^n u_n$ CV.*

NOTATION

Soit X une intégrale généralisée ou une série et idem pout Y. On note $X \overset{\frown}{\sim} Y$ pour signifier que X et Y sont **de même nature** : soit elles convergent toutes les deux, soit elles divergent. Il faut vérifier

$$X \text{ converge} \implies Y \text{ converge} \qquad \text{et} \qquad Y \text{ converge} \implies X \text{ converge.}$$