Livret 1ère - Term spé math
Lycée Louis BASCAN

I. Calcul littéral

Exercice 1 :

1) $3x^2 - 4x + 2 = 3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) + 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$

2) $3x^2 - 4x + 3y^2 + 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow 3\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right) + 3\left((y+1)^2 - 1\right) = 8$

$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3(y+1)^2 = 8 + \frac{13}{3} = \frac{37}{3} \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{37}{9}$

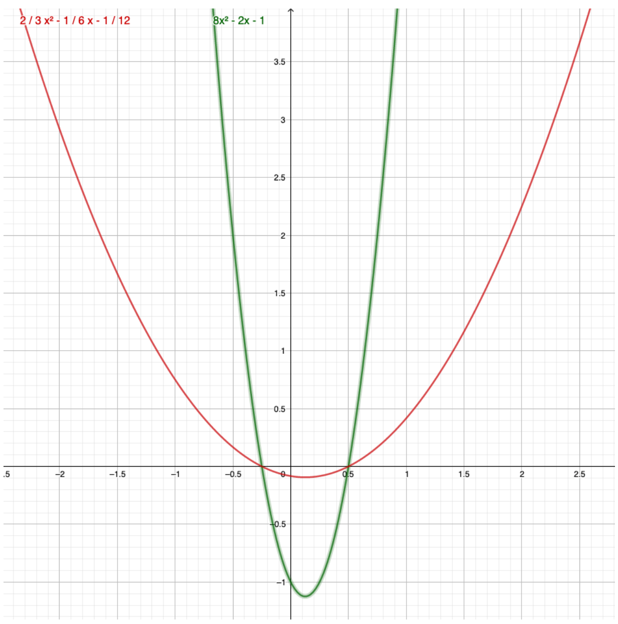
Les points M solutions de cette équations forment un cercle de centre $M_0\left(\frac{2}{3}; -1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{37}}{3}$.

<u>Remarque :</u> autant dire que je suis assez surpris d'un résultat pareil pour le 1er exercice de la feuille ! Mais je ne trouve pas d'erreur de calcul s'il y en a. Je suis preneur si quelqu'un trouve et qu'on arrive sur un résultat plus simple !

Exercice 2 :

a) On va commencer par multiplier toute l'équation par 12 pour s'affranchir des dénominateurs qui alourdissent l'écriture sans modifier le résultat final:
$\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{12} = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 1 = 0$

<u>Remarque :</u> évidemment, l'équivalence ne vaut que pour le 0 comme membre de droite ! Les courbes représentatives sont distinctes sur tous les autres points :



Je vous propose 3 méthodes pour cette équation. (On aura déjà fait le tour des différentes méthodes pour trouver les racines des trinômes)

<u>1ère méthode :</u> on remarque que $x = \dfrac{1}{2}$ est solution de l'équation.

<u>Remarque :</u> il est toujours intéressant de tester les valeurs évidentes $-2, -1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1, 2$*, sans passer trop de temps non plus !*

Donc, en procédant par identification, on trouve : $8x^2 - 2x - 1 = 8\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{4}\right)$

<u>Rappel :</u> pour l'identification, on identifie les termes en x^2 *et les termes constants et on contrôle avec les termes en x.*

Les solutions sont donc $x_1 = -\dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

<u>2ème méthode :</u> on utilise le discriminant, méthode classique !

$\Delta = 4 + 32 = 36$

D'où $x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{36}}{16} = -\dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{36}}{16} = \dfrac{1}{2}$

<u>2ème méthode :</u> on utilise le discriminant réduit, car on note que « b » est paire

$\Delta' = 1 + 8 = 9$

D'où $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{9}}{8} = -\dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{9}}{8} = \dfrac{1}{2}$

<u>Remarques :</u>
Evidemment (et heureusement), on arrive au même résultat !
Personnellement, je n'utilise jamais le discriminant réduit, car s'il permet de simplifier les calculs en s'affranchissant de facteurs qui vont se simplifier, il faut faire attention à bien prendre les bon coefficients dans les solutions.

b) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

On pose $X = x^2$
L'équation devient : $X^2 - X - 12 = 0$

Pour cette équation on a : $\Delta = 1 + 48 = 49$
Et donc les solutions sont : $X_1 = 4,\ X_2 = -3$

Mais comme $X = x^2$, on ne peut pas retenir la solution X_2
Donc on conclut : $X_1 = 4$.

Finalement, les solutions de l'équation sont : $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$

c) $\dfrac{6}{2x + 1} \leqslant 4x - 1$

Pour que cette inéquation soit définie, il faut que $2x + 1 \neq 0$ ou $x \neq -\dfrac{1}{2}$

Etudions rapidement l'équation $(2x + 1)(4x - 1) - 6 = 0$
$(2x + 1)(4x - 1) - 6 = 8x^2 + 2x - 7 = 0$

$\Delta = 4 + 224 = 228$

Et donc les racines sont : $x_1 = \dfrac{-2-4\sqrt{57}}{16} = -\dfrac{1+2\sqrt{57}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{-2+4\sqrt{57}}{16} = \dfrac{-1+2\sqrt{57}}{8}$

<u>Rappel :</u> un trinôme est du signe de « a » (ici positif) sauf entre ses racines.

On va ensuite séparer les cas en fonction du signe que $2x+1$:

- Pour $x < -\dfrac{1}{2}$, $2x+1<0$: $\dfrac{6}{2x+1} \leqslant 4x-1 \Leftrightarrow (2x+1)(4x-1)-6 \leqslant 0$

Donc $x \in \left[x_1 ; -\dfrac{1}{2}\right[$

- Pour $x > -\dfrac{1}{2}$, $2x+1>0$: $\dfrac{6}{2x+1} \leqslant 4x-1 \Leftrightarrow (2x+1)(4x-1)-6 \geqslant 0$

Donc $x \in \left[x_2 ; +\infty\right[$

$\boxed{\text{Finalement } \dfrac{6}{2x+1} \leqslant 4x-1 \Leftrightarrow x \in \left[x_1 ; -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[x_2 ; +\infty\right[}$

d) $\left(4-2x^2\right)(2x-1) > 0$

On va donc chercher pour quelles valeurs les 2 membres sont de même signe et non nuls :

$2x-1>0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$ et $2x-1<0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

$4-2x^2>0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\right[$ et $4-2x^2<0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2} ; +\infty\right[$

$\boxed{\text{Donc } \left(4-2x^2\right)(2x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\sqrt{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2} ; \sqrt{2}\right[}$

Exercice 3 :

1) $-1 \leqslant x \leqslant 2$ donc $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$ car $0 \leqslant |x| \leqslant 2$

donc $-4 \leqslant -x^2 \leqslant 0$ car la multiplication par -1 inverse le sens des inégalités

donc $1 \leqslant 5-x^2 \leqslant 5$ car l'addition ne change pas le sens des inégalités

donc $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{5-x^2} \leqslant 1$ car l'inverse (fonction décroissante) inverse le sens des inégalités

$\boxed{\text{Donc pour } x \in [-1;2],\ \dfrac{1}{5-x^2} \in \left[\dfrac{1}{5};1\right]}$

2) f n'est pas définie si $5-x^2=0$ ou $x = \pm\sqrt{5}$

Donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}\backslash\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$

f est dérivable sur son domaine de définition en tant qu'inverse d'une fonction dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(5-x^2\right)^2}$.

Donc f' est du signe de x et f est décroissante sur $[-1;0[$, croissante sur $]0;2]$ avec un minimum en 0.

De plus : $f(-1) = \dfrac{1}{4}, f(2) = 1$ et $f(0) = \dfrac{1}{5}$.

On retrouve bien le même intervalle image que dans la question précédente !

Exercice 4 :

1. *<u>Rappel :</u> pour supprimer les racines du dénominateur, on multiplie par l'expression conjuguée pour faire apparaître une identité remarquable.* $\left(a + b\sqrt{c}\right)\left(a - b\sqrt{c}\right) = a^2 - b^2 c$

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

c) $\dfrac{1-2\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}} = \dfrac{\left(1-2\sqrt{5}\right)\left(5-3\sqrt{5}\right)}{25-45} = \dfrac{-35+13\sqrt{5}}{20}$

2.
a) FAUX. $\sqrt{-x}$ est définie si $-x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 0$
b) VRAI. $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|-x\right| \geqslant 0$

3.
a) Pour que $A(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ soit définie, il faut que $\sqrt{x} \neq 0$ et donc $x \neq 0$
b) Si $x \neq 0, A(x) = \dfrac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 2$

4.
a) On peut écrire $\sqrt{x^2} = |x|$
b) $\sqrt{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\left(\sqrt{x}\right)^2$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ (le domaine de définition de $\sqrt{x}$), x est définie sur $\mathbb{R}$.
c) La réponses est non : en prenant par exemple $x = -1$
d) On peut écrire : $x - 2\sqrt{x^2} = x - 2|x|$
Donc, on va séparer les 2 cas :
- $x \geqslant 0,\ |x| = x$, donc $x - 2\sqrt{x^2} = -x$
- $x \leqslant 0,\ |x| = -x$, donc $x - 2\sqrt{x^2} = 3x$

Exercice 5 :

1. Pour $k \geqslant 2,\ k-1 \leqslant k$ et donc $k\left(k-1\right) \leqslant k^2$

En passant à l'inverse (on inverse le sens de l'inégalité) : $\boxed{\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k\left(k-1\right)}.}$

On décompose la fraction : $\dfrac{1}{k\left(k-1\right)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k-1} = \dfrac{ak - a + bk}{k\left(k-1\right)}$

On trouve donc (n'hésitez pas à poser le système si besoin) $a = -1$ et $b = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } \frac{1}{k\left(k-1\right)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

2. $B = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k\left(k-1\right)} = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

On reconnait une somme télescopique (les termes s'annulent au fur et à mesure) :

$$B = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right)$$

Les premiers termes permettent de constater le principe et à la fin il reste le premier et le dernier terme.

$$\boxed{\text{Finalement } B = \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k\left(k-1\right)} = 1 - \frac{1}{20}}$$

3. D'après la question 1, on peut écrire $\sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k\left(k-1\right)}$ (en sommant chacun des inégalité.

On en déduit $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k\left(k-1\right)}$

Donc $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{20}$

4. Voici un programme Python (paramétrable, on demande le nombre de termes qu'on veut sommer).

```
def somme_inverse_carres(n):
    somme = 0
    for i in range(1, n+1):
        somme += 1 / (i**2)
    return somme

nombre = int(input("Entrez un nombre : "))
resultat = somme_inverse_carres(nombre)
print("La somme de l'inverse des carrés jusqu'à", nombre, "est :",
resultat)
```

$$\boxed{\text{Le résultat retourné est : } \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} = 1{,}596163 \leqslant 2 - \frac{1}{20}}$$

5. On reproduit exactement le raisonnement des questions 2 et 3 (je laisse chacun le reprendre au besoin) et on arrive sur :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2}$$