Exercice 243 :

Lemme de Riemann-Lebesgue

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une application définie sur $\left[a, b\right]$, à valeurs réelles, dérivable et à dérivée continue.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, démontrer que $\left| \int_a^b f(t) sin(\lambda t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} \left(\left| f(a) \right| + \left| f\left(b\right) \right| + \int_a^b \left| f'(t) \right| dt \right)$

En déduire que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) sin(\lambda t)\, dt = 0$

Solution :

On va procéder à une intégration par partie *(on y pense tout de suite (enfin ou pas tout de suite, mais ça doit venir) en voyant les valeurs de f aux bornes considérées et une intégrale sur f' + un réflexe qu'on doit avoir/acquérir sur les fonctions trigonométriques, on en reparle en dessous !)*.

Pour cette intégration par partie, on va dériver f (les propriétés données à cette fonction en hypothèse nous permettent de le faire sans souci) et donc intégrer la fonction $x \mapsto sin(\lambda x)$, dont une primitive est $x \mapsto -\frac{1}{\lambda} cos(\lambda x)$. *(Attention à ne pas oublier le « - » dans la primitive. On voit apparaitre le $\frac{1}{\lambda}$ qui nous encourage dans cette voie).*

On a donc : $\int_a^b f(t) sin(\lambda t)\, dt = \left[-\frac{1}{\lambda} f(t) cos(\lambda t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{\lambda} cos(\lambda t) f'(t)\, dt$

$= \frac{1}{\lambda} \left(f(a) cos(\lambda a) - f\left(b\right) cos\left(\lambda b\right) \right) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b cos(\lambda t) f'(t)\, dt$

En prenant la valeur absolue de cette égalité et en utilisant l'inégalité triangulaire.

R*appels :*

- *Pour les soustractions, on peut utiliser « brutalement » $\left| a - b \right| = \left| a + \left(-b\right) \right| \leqslant \left| a \right| + \left| b \right|$. C'est souvent (et malheureusement) trop large cependant*
- *On va utiliser la propriété « de base » des fonctions trigonométriques (ici pour cosinus, mais aussi vrai évidemment pour sinus) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left| cos(x) \right| \leqslant 1$*
- *L'inégalité triangulaire s'applique sur les intégrales (qu'on peut voir comme la limite d'une somme d'aires de rectangles)*

$$\left| \int_a^b f(t) sin(\lambda t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} \left(\left| f(a) cos(\lambda a) \right| + \left| f\left(b\right) cos\left(\lambda b\right) \right| + \left| \int_a^b cos(\lambda t) f'(t)\, dt \right| \right) \leqslant \frac{1}{\lambda} \left(\left| f(a) \right| + \left| f\left(b\right) \right| + \int_a^b \left| cos(\lambda t) f'(t) \right| dt \right)$$

Et finalement :

$$\left| \int_a^b f(t) sin(\lambda t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{\lambda} \left(\left| f(a) \right| + \left| f\left(b\right) \right| + \int_a^b \left| f'(t) \right| dt \right)$$

La 2ème question est immédiate, les 3 éléments de la somme étant indépendants de λ et on conclut bien que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) sin(\lambda t)\, dt = 0$.

Problème 1 :

Calcul de $\zeta(2)$.

1. a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^\pi t cos(nt)\, dt$ et $\int_0^\pi t^2 cos(nt)\, dt$

b) Déterminer deux constantes réelles a et b telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} \left(at^2 + bt\right) cos\,(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$.

2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$, soit $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} cos\left(kt\right)$.

Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$ non multiple entier de 2π : $C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

3. Déduire de ce qui précède que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \varphi(t)\, sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt$ où φ et une fonction définie et continue sur $\left[0,\pi\right]$ que l'on précisera.

4. On admet que φ est dérivable sur $\left[0,\pi\right]$ et que sa dérivée est continue. Montrer en utilisant l'exercice 243 (Lemme de Riemann-Lebesgue) que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution :

1. a) Nous allons utiliser des intégration par parties pour cette première question :

$$\int_0^{\pi} tcos\,(nt)\,dt = \left[\frac{1}{n}tsin\,(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} sin\,(nt) = \frac{1}{n^2}\left[cos\,(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}cos\,(n\pi) - \frac{1}{n^2}$$

$$\int_0^{\pi} t^2cos\,(nt)\,dt = \frac{1}{n}\left[t^2sin\,(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} tsin\,(nt)\,dt = \frac{2}{n^2}\left[tcos\,(nt)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} cos\,(nt)\,dt$$
$$= \frac{2\pi}{n^2}cos\,(n\pi) + \frac{2}{n^2}\left[sin\,(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{n^2}cos\,(n\pi)$$

b) D'après la question précédente :

$$\int_0^{\pi} \left(at^2 + bt\right) cos\,(nt)\,dt = \frac{2a\pi}{n^2}cos\,(n\pi) + \frac{b}{n^2}cos\,(n\pi) - \frac{b}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\left(2a\pi + b\right) cos\,(n\pi) - b\right)$$

On veut donc :

$$\begin{cases} 2a\pi + b = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \text{ et finalement } \begin{cases} a = \frac{1}{2\pi} \\ b = -1 \end{cases}$$

2. *Rappel : pour les sommes trigonométriques, il est souvent intéressant d'utiliser les complexes, en particulier à l'aide de la formule de Moivre* $\left(cos\,(x) + isin\,(x)\right)^n = cos\,(nx) + isin\,(nx)$*, qui se démontre immédiatement avec l'écriture exponentielle, dont on va se servir tout de suite)*

Introduisons une autre somme : $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} sin\left(kt\right)$ et calculons $C_n(t) + iS_n(t)$

$$C_n(t) + iS_n(t) = \sum_{k=1}^{n} cos\left(kt\right) + i\sum_{k=1}^{n} sin\left(kt\right) = \sum_{k=1}^{n} cos\left(kt\right) + isin\left(kt\right)$$

En passant à la forme exponentielle :

$$C_n(t) + iS_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = e^{it}\frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} = e^{i\frac{t}{2}}\frac{1 - e^{int}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} = \frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{-2isin\left(\frac{t}{2}\right)} = i\,\frac{e^{i\frac{t}{2}} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

t est non multiple entier de 2π, donc $e^{it} \neq 1$, ce qui justifie la division.

On extrait la partie réelle : $C_n(t) = \dfrac{-sin\left(\frac{t}{2}\right) + sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

3. On va chercher à utiliser les résultats des questions 1 et 2 pour arriver au résultat. Il faut donc s'assurer que la fonction C_n est intégrable sur $]0,\pi]$

En 0, on a $sin(x) \sim x$ et donc $\dfrac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sim \dfrac{\frac{2n+1}{2}t}{\frac{t}{2}} = 2n+1$, ce qui nous assure l'intégrabilité

(vocabulaire à confirmer…)

$$\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^{n} cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)cos(kt) = \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)$$

On va intégrer entre 0 et π et on peut intervertir la somme et l'intégrale.

On décompose les éléments pour ne pas surcharger l'écriture !
$\displaystyle\int_0^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)cos(kt)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)cos(kt)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ (ce résultat est le but de la question 1)

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{t^2}{2\pi} - tdt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt = \int_0^{\pi}\varphi(t)\,sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt$ avec $\varphi(t) = \left(\dfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\times\dfrac{1}{2sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

On est content de ne pas avoir à étudier plus en détail la fonction φ ! On vérifie tout de même qu'elle peut être prolongée en 0 car elle n'y est pas définie.
Avec l'équivalence déjà utilisée pour sinus, on trouve : $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = -1$, ce qui nous permet de confirmer les hypothèses sur φ.

Finalement, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi}\varphi(t)\,sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt.$

4. En faisant tendre n vers $+\infty$, on se retrouve dans la situation de l'exercice 243 sur l'intégrale « résiduelle » et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\,sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt = 0.$

Et on conclut ce problème : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$