Exercice 36 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simple des n premiers nombres impaires : $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$.

Solution :

Nommons : $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$.

$S_1 = 1 = 1^2$
$S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$

Suite à cette initialisation, prouvons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.

En supposant à propriété vraie au rang n, étudions le rang $n + 1$:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = S_n + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.

Exercice 37 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n^2 + n}{3}$.

Calculer u_n.

Solution :

Réécrivons la somme considérée : $\frac{n^2 + n}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{n(n + 1)}{2}$.

Et on reconnaît : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}$.

On conclut : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_k = \frac{2k}{3}$.

Exercice 38 :

Table de Pythagore. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On trace la table des multiplications des entiers de 1 à n. On obtient donc un carré de n^2 nombres entiers. Quelle est la moyenne de ces nombres ?

Solution :

Réfléchissons par ligne.

La 1ère ligne (multiplication par 1) correspond donc aux n entiers considérés.
La moyenne de cette ligne (notons ces moyennes M_k) est donc :

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n + 1}{2}.$$

Les autres lignes sont des multiples de cette première ligne. Et on a directement $M_k = k\dfrac{n+1}{2}$.

Finalement, la moyenne $M = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n+1}{2n}\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{(n+1)^2}{4}$

Exercice 39 :

Soit $x \in \left]-1;1\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$.

Solution :

Développons l'écriture : $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$
On a donc : $xS_n = x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}$

En soustrayant les 2 lignes : $S_n - xS_n = (1-x)S_n = 1 - x^{n+1}$ (les autres termes s'annulant).

D'où on tire : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Comme $x \in \left]-1;1\right[$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{n+1} = 0$, ce qui termine la démonstration.

On conclut finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 40 :

a) En utilisant la formule de la progression géométrique et la dérivation, calculer pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$. On distinguera la cas $x = 1$.

b) Si $x \in \left]-1;1\right[$, calculer la limite de la somme précédente lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

a) Notons $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

On choisit $n \in \mathbb{N}$.

On sait déjà *(exercice précédent si besoin)* que $\forall x \neq 1,\ f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Par ailleurs, en dérivant termes à termes

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{n'}(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(k-1\right)x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} kx^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^k.$$

Et avec le résultat de la somme, $f_n'(x) = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x) + x^{n+1}}{(1-x)^2} = \dfrac{(n+1)\left(x^{n+1} - x^n\right) + x^{n+1}}{(1-x)^2}$

$$= \frac{(n+2)x^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2} = \frac{x^{n+1} + (n+1)x^n(x-1)}{(1-x)^2}$$

En reprenant les 2 expressions : $\sum_{k=0}^{n-1} k\,x^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} k\,x^k + \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x^{n+1}+(n+1)\,x^n\,(x-1)}{(1-x)^2}$

En changeant d'indice :
$$\sum_{k=0}^{n} k\,x^k = \frac{x^{n+2}+(n+2)\,x^{n+1}\,(x-1)}{(1-x)^2} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+2}}{(1-x)^2} - \frac{(n+3)\,x^{n+1}-1}{1-x}$$

Pour $x = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k\,x^k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $x \in \left]-1;1\right[$, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\,x^k = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 41 :

On pose pour n dans $\mathbb{N}^*$: $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Simplifier $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la monotonie de $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solution :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2\,(n+1)} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{(2n+1)\,n + 2n\,(n+1) - 2\,(n+1)\,(2n+1)}{2n\,(n+1)\,(2n+1)}$$
$$= \frac{2n^2+n+2n^2+2n-4n^2-2n-4n-2}{2n\,(n+1)\,(2n+1)} = \frac{-3n-2}{2n\,(n+1)\,(2n+1)} < 0$$

On déduit donc que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.