Remarque : dès qu'on doit étudier le comportement d'une fonction (voir d'une suite définie à partir d'une fonction), il est intéressant de regarder le graphique de la fonction considérée à la calculatrice ou Géogébra !

Exercice 122 :

Trouvez la limite en $+\infty$ des fonctions :

a : $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$, b : $x \mapsto \dfrac{x+7}{4x+3}$, c : $x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$, d : $x \mapsto \dfrac{sin\,(x)}{x}$

e : $x \mapsto cos\left(x^2\right)e^{-x}$, f : $x \mapsto \dfrac{ln\left(ln\,(x)\right)}{ln\,(x)}$, g : $x \mapsto \left(2+sin\,(x)\right)x$

Solution :

a : En $+\infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$, $-\sqrt{x} \to -\infty$ et $e^{-\sqrt{x}} \to 0$

b : En $+\infty$, $\dfrac{x+7}{4x+3} = \dfrac{x\left(1+\frac{7}{x}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{1+\frac{7}{x}}{4+\frac{3}{x}}$, $1+\dfrac{7}{x} \to 1$, $4+\dfrac{3}{x} \to 4$ et $\dfrac{x+7}{4x+3} \to \dfrac{1}{4}$

c : En $+\infty$, $\dfrac{x^2+5}{x^3-1} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(x-\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{5}{x^2}}{x-\frac{1}{x^2}}$, $1+\dfrac{5}{x^2} \to 1$, $x-\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$, $\dfrac{x^2+5}{x^3-1} \to 0$

d : $\left|sin\,(x)\right| \leqslant 1$ en $+\infty$, $\dfrac{sin\,(x)}{x} \to 0$

e : $\left|cos\left(x^2\right)\right| \leqslant 1$ en $+\infty$, $cos\left(x^2\right)e^{-x} \to 0$

f : On pose $X = ln(x)$ et $\dfrac{ln\left(ln\,(x)\right)}{ln\,(x)} = \dfrac{ln\,(X)}{X}$. En $+\infty$, $X \to +\infty$ et par croissance comparée,

$\dfrac{ln\left(ln\,(x)\right)}{ln\,(x)} \to 0$

Remarque : je pense qu'il n'est pas nécessaire d'aller plus loin dans le cadre de cet exercice de révision, si on veut aller plus loin dans la démonstration de la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{ln\,(x)}{x}$, on peut étudier les variations de la fonction $x \mapsto ln\,(x) - 2\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 1$, on divise ensuite par x et on aboutit sur une comparaison entre $\dfrac{ln\,(x)}{x}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

g : $1 \leqslant 2+sin\,(x) \leqslant 3$, en $+\infty$, $\left(2+sin\,(x)\right)x \to +\infty$

Exercice 123 :

Trouvez la limite en 0 des fonctions :

a : $x \mapsto \dfrac{cos\left(e^x\right)}{2+ln\,(x)}$, b : $x \mapsto \dfrac{ln\,(x)}{\sqrt{x}}$, c : $x \mapsto xln\,(x)$, d : $x \mapsto \sqrt{x}ln\,(x)$

Solution :

a : en 0, $cos\left(e^x\right) \to cos\,(1)$, $2+ln\,(x) \to -\infty$ et $\dfrac{cos\left(e^x\right)}{2+ln\,(x)} \to 0$

b : en 0, $ln\,(x) \to -\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$ et $\dfrac{ln\,(x)}{\sqrt{x}} \to -\infty$

c : <u>Remarque :</u> *comme pour l'exercice précédent, je pense qu'on peut se contenter du résultat classique et à connaitre de croissances comparées. Pour aller plus loin, on utilise le résultat en $+\infty$ vu ci-dessus, et on considère si $x \to 0$, $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ et une propriété à garder en tête : $ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -ln\,(x)$.*

En 0, $xln\,(x) \to 0$.

d : On pose $X = \sqrt{x}$ et on écrit : $\sqrt{x}ln\,(x) = Xln\left(X^2\right) = 2Xln\,(X)$.

Donc, en 0, $\sqrt{x}ln\,(x) \to 0$.

<u>Exercice 124 :</u>

Trouver la limite en $+\infty$ des fonctions :

a : $x \mapsto \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$, b : $x \mapsto x - \sqrt{x^2 - x - 1}$.

<u>Solution :</u>

a : La fonction « partie entière » n'est pas franchement pratique à manipuler, on va utiliser l'encadrement qui la définit (en espérant que cela nous suffise pour conclure !)

On sait que $x \leqslant \lfloor x \rfloor < x + 1$.

En $+\infty$, on peut diviser par x sans problème donc $\dfrac{x}{x} \leqslant \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} < \dfrac{x+1}{x}$ qu'on peut également écrire :

$1 \leqslant \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} < 1 + \dfrac{1}{x}$.

Donc $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{x} \to 1$ quand $x \to +\infty$.

b : Si on « reformule » l'expression de la fonction (on est toujours au voisinage de $+\infty$, donc pas de problème pour la mise en facteur) : $x - \sqrt{x^2 - x - 1} = x\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}}\right)$

Sans pouvoir conclure directement par l'utilisation d'un développement limité qui ne doit pas être au programme de terminale, on utilise l'approximation fournie par la fonction dérivée au voisinage de 0 (quand $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x} \to 0$. On considère $X = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ et la fonction $X \mapsto \sqrt{1+X}$) :

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} \sim \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + 1$$

Qu'on réintègre dans l'expression précédente

$$x - \sqrt{x^2 - x - 1} = x\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}\right) \sim x\left(1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) - 1\right)$$

D'où $x - \sqrt{x^2 - x - 1} \sim \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x}$.

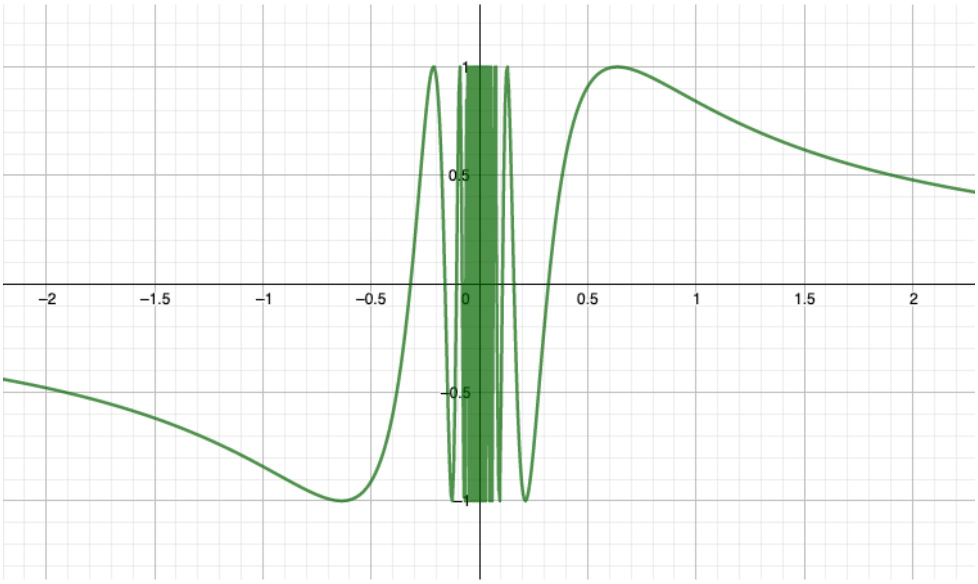
Et on conclut : $x - \sqrt{x^2 - x - 1} \to \dfrac{1}{2}$ quand $x \to +\infty$.

<u>Exercice 125 :</u>

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, soit $f\,(x) = sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) Tracer le graphe de f. Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
b) La fonction a-t-elle une limite en 0 ?
c) Quelle est la limite de $xf(x)$ quand x tend vers 0 ?

Solution :
a)



Quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et donc $f(x) \to 0$.

b) En $+\infty$, la fonction sinus n'a pas de limite, donc f n'en a pas en 0.

c) $-1 \leqslant sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ et $xsin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ en 0.

Exercice 126 :
Trouver la limite (finie ou infinie) des suites définies par les formules suivantes :

$$a_n = \frac{2n+5}{6n+7},\ b_n = \frac{n^2-5n+6}{n\sqrt{n}},\ c_n = \frac{5+3sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3},\ d_n = \sqrt{n+cos(n)} - \sqrt{n}$$

$$e_n = -2n^2 + (-1)^n,\ f_n = \sqrt{n} - sin(2n)^2 - 7,\ g_n = \frac{1+5sin^3(n)}{3n-7\sqrt{n}+cos(n)}$$

Solution :
Je n'insiste pas ici, les différents ont été abordés précédemment, je pense que les réécritures suffisent voir rien du tout (comme c_n ou e_n

$$a_n = \frac{2n+5}{6n+7} = \frac{2n\left(1+\frac{5}{2n}\right)}{6n\left(1+\frac{7}{6n}\right)} = \frac{1\left(1+\frac{5}{2n}\right)}{3\left(1+\frac{7}{6n}\right)} \to \frac{1}{3}$$

$$b_n = \frac{n^2-5n+6}{n\sqrt{n}} = \frac{n\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n\sqrt{n}}\right)}{n\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{5}{\sqrt{n}} + \frac{6}{n\sqrt{n}} \to +\infty$$

$$c_n = \frac{5+3sin^2(n)}{\sqrt{n+2}+3} \to 0$$

$$d_n = \sqrt{n+cos(n)} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{cos(n)}{n}} - 1\right) \sim 2\sqrt{n}\frac{cos(n)}{n} \to 0$$

$$e_n = -2n^2 + (-1)^n \to -\infty$$

$$f_n = \sqrt{n} - sin(2n)^2 - 7 \to +\infty$$

$$g_n = \frac{1+5sin^3(n)}{3n-7\sqrt{n}+cos(n)} = \frac{1+5sin^3(n)}{n\left(3-\frac{7}{\sqrt{n}}+\frac{cos(n)}{n}\right)} \to 0$$

Exercice 127 :

Calculez les limites, en utilisant éventuellement les taux d'accroissement :

Quand x tend vers 0 : $\dfrac{cos(x)-1}{x}$, $\dfrac{sin(5x)}{x}$, $\dfrac{ln(1+2x)}{sin(4x)}$.

Quand x tend vers 1 : $\dfrac{ln(x)}{x-1}$.

Quand x tend vers $+\infty$: $xln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$.

Solution :

On a bien à faire à des formes indéterminées : « $\dfrac{0}{0}$ » et « $+\infty \times 0$ » pour le dernier.

- Quand x tend vers 0 :

$cos(x) \to 1$ et on reconnaît la dérivée de la fonction cosinus en 0, donc
$\dfrac{cos(x)-1}{x} \to cos'(0) = sin(0) = 0$

Pour la 2ème, on va « forcer » l'apparition de la dérivée : $\dfrac{sin(5x)}{x} = 5 \times \dfrac{sin(5x)}{5x}$

Donc $\dfrac{sin(5x)}{x} \to 5 \times sin'(0) = 5 \times cos(0) = 5$

Là encore, on va transformer l'écriture pour faire apparaître une fraction de taux d'accroissements !
Ce qui va être écrit est valable uniquement $x \neq 0$, valeur pour laquelle la fonction n'est de toute façon pas définie.
$\dfrac{ln(1+2x)}{sin(4x)} = \dfrac{x}{x} \times \dfrac{ln(1+2x)}{sin(4x)} = \dfrac{ln(1+2x)}{x} \times \dfrac{x}{sin(4x)}$.

Passée cette première étape, on utilise la même astuce que précédemment :
$\dfrac{ln(1+2x)}{x} \times \dfrac{x}{sin(4x)} = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{ln(1+2x)}{2x} \times \dfrac{4x}{sin(4x)}$.
Et finalement $\dfrac{ln(1+2x)}{sin(4x)} \to 1$

- Quand x tend vers 1 :

Pas de piège pour cette fonction, comme $ln(1) = 0$, on a directement :

$\dfrac{ln(x)}{x-1} \to ln'(1) = 1$ (Rappel $ln'(x) = \dfrac{1}{x}$)

- Quand x tend vers $+\infty$:

Posons $X = \dfrac{1}{x}$, qui lui tend donc vers 0.

$xln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 2\dfrac{ln(1+2X)}{2X}$ et on reconnaît à nouveau un taux d'accroissement :

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(1+x)}{x} = 1, xln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \to 2.$

Exercice 128 :

(Une formule de Viète) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

a) En utilisation la formule de duplication du sinus, simplifier l'expression de P_n, déterminer la limite de la suite $\left(P_n(x)\right)_{n\geqslant 1}$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n radicaux). Et $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$.

Montrer le résultat intermédiaire $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, puis que $\dfrac{v_n}{2^n} \to \dfrac{2}{\pi}$.

(Cette formule pour π a été découverte par Viète en 1593)

Solution :

Remarque : l 'énoncé du poly fait référence aux exercices 105 et 106, mais comme je ne les ai pas encore fait au moment de faire celui-ci, je propose de tout traiter ici).

a) Rappel : $sin\left(a+b\right) = sin(a)cos\left(b\right) + cos(a)sin\left(b\right)$ et donc $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$.

Si on « enchaîne » les formules de duplication, on trouve :

$sin(x) = 2sin\left(\dfrac{x}{2}\right)cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2^2 sin\left(\dfrac{x}{2^2}\right)cos\left(\dfrac{x}{2^2}\right)cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, sin(x) = 2^n sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$

C'est évidemment la formule initialisée ci-dessus, montrons en l'hérédité en supposant que la formule est vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:

A partir de la formule : $sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = 2sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)cos\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ et en l'intégrant dans la formule donnée par l'hypothèse de récurrence, on obtient directement le résultat voulu,

$sin(x) = 2^{n+1}sin\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$, ce qui conclut la démonstration.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, sin(x) = 2^n sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\displaystyle\prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, sin(x) = 2^n sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)P_n(x)$ ou pour $x \neq 0[\pi]$ $P_n(x) = \dfrac{sin(x)}{2^n sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.

Si $x = 0[2\pi]$, $P_n(x) = 1$ (donc la limite en $+\infty$ est 1) et i $x = \pi[2\pi]$, et $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, $P_n(x) = (-1)^k$ (donc il n'y a pas de limite en $+\infty$).

Pour les autres valeurs de x (en particulier $x \neq 0$), on peut écrire

$$P_n(x) = \frac{sin(x)}{2^n sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{sin(x)}{x} \times \frac{x}{2^n sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Pour l'opérande de droite, on reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de sinus en 0 (en posant $X = \frac{x}{2^n}$) et $sin'(0) = cos(0) = 1$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \frac{sin(x)}{x}$

b) Montrons le résultat proposé par récurrence.

Pour $n = 0 : cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $u_0 = \sqrt{2} = 2cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right)$.

Supposons le résultat vrai pour le rang n et étudions le rang $n+1$:

D'après la formule de duplication : $cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1$.

En intégrant l'hypothèse de récurrence,

$$2cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2} + 1 = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2}$$ (n radicaux).

Donc (le cosinus d'une valeur entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ étant positif) : $2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ ($n+1$ radicaux).

Ce qui termine la preuve de l'hérédité et donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

On peut écrire : $v_n = 2^n P_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Comme $sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, avec la question précédente on trouve immédiatement $\frac{v_n}{2^n} \to \frac{2}{\pi}$.