# Exercice 222 :

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$a : x \in \mathbb{R} \mapsto cos\,(3x) + 2sin\,(5x)$, $b : x \in \mathbb{R} \mapsto 6e^{-4x}$, $c : x \in \mathbb{R} \mapsto cos\,(x)\,sin\,(x)$

$d : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2e^{-x^3}$, $e : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$, $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^xe^{e^x}$, $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$

$h : x \in ]-1;1[ \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$, $i : x \in \mathbb{R} \mapsto (1-2x)^5$, $j : x \in ]-\infty;1[ \mapsto \dfrac{x^2}{x^3-1}$

$k : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+2e^{-x}}$, $l : x \in \left]1;+\infty\right[ \mapsto \dfrac{\left(ln\,(x)\right)^{\alpha}}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $m : x \in \left]-1;+\infty\right[ \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^n}$

$n : x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[ \mapsto tan\,(x)$, $p : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{sin\,(x) - xcos\,(x)}{x^2}$

## Solution :

Par défaut, nous appellerons $F$ les primitives cherchées et si besoin $f$

On ne renote pas l'ensemble de définition qui par défaut reste le même. Il sera précisé uniquement si besoin

*<u>Remarque :</u> on va retrouver plusieurs fois dès cet exercice les formules du type $F'(ax) = af\,(ax)$.*
*<u>Rappel :</u> c'est un peu rébarbatif, mais la formule des primitives se définit toujours à une constante près. A ne pas oublier, sinon le résultat est faux (Spoiler : je l'ai oublié plusieurs fois pendant la rédaction). Evidemment, ça se change rien pour le calcul d'intégrales.*

$a :\ F(x) = \dfrac{1}{3}sin\,(3x) - \dfrac{2}{5}cos\,(5x) + C$

$b :\ F(x) = -\dfrac{6}{4}e^{-4x} + C = -\dfrac{3}{2}e^{-4x} + C$

$c : F(x) = \dfrac{1}{2}sin^2(x) + C$ ou $F(x) = -\dfrac{1}{2}cos^2(x) + C$

$d : F(x) = -\dfrac{1}{3}e^{-x^3} + C$

$e : F(x) = \dfrac{1}{2}ln\left(x^2+1\right) + C$

*<u>Remarque :</u> une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $ln\,|u|$ mais la quantité $x^2+1$ est strictement positive.*

$f : F(x) = e^{e^x} + C$

$g : F(x) = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

$h : F(x) = 3\sqrt{1-x^2} + C$

$i : F(x) = -\dfrac{1}{12}(1-2x)^6 + C$

$j : F(x) = ln\left(1-x^3\right) + C$

$k$ : pour la fonction suivante, réécrivons l'expression : $f(x) = \dfrac{1}{1+2e^{-x}} = \dfrac{e^x}{e^x+2}$

$F(x) = ln\left(e^x+2\right) + C$

$l : F(x) = \dfrac{\left(ln(x)\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (il faut $\alpha \notin \{-1;0\}$)

$m : F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}} + C$ (il faut $n \notin \{0;1\}$)

$n : f(x) = tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$
$F(x) = ln\left|-cos(x)\right| + C$

$p : F(x) = \dfrac{sin(x)}{x} + C$

# Exercice 223 :

En utilisant les relations obtenues dans l'exemple 2 du 2.3 et dans l'exercice 46, calculer :
$I = \displaystyle\int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)},\ J = \int_2^5 \frac{dt}{t(t+1)(t+2)}.$

## Solution :

*<u>Remarque :</u> Le principe de ces intégrales est de décomposer les fractions en éléments simples. On ne revient pas sur les calculs ici, si vous n'avez pas parcouru les précédents chapitres précédents, je vous recommande de les faire.*

$I = \displaystyle\int_1^3 \frac{dt}{t(t+1)} = \int_1^3 \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}dt = \left[ln(t) - ln(t+1)\right]_1^3 = ln(3) - ln(4) + ln(2) = ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0;-1;-2\},\ \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$

Donc $J = \displaystyle\int_2^5 \frac{1}{2t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2(t+2)}dt = \left[\frac{1}{2}ln(t) - ln(t+1) + \frac{1}{2}ln(t+2)\right]_2^5$
$= \dfrac{1}{2}\left(ln(5) - ln(2)\right) - ln(6) + ln(3) + \dfrac{1}{2}\left(ln(7) - ln(4)\right) = ln\left(\dfrac{25\times3\times49}{4\times6\times16}\right) = ln\left(\dfrac{3675}{384}\right) = ln\left(\dfrac{1225}{128}\right)$

# Exercice 224 :

Pour $p$ et $q$ dans $\mathbb{N}^*$, calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} cos(pt)\,cos(qt)\,dt,\ J = \int_0^{2\pi} sin(pt)\,sin(qt)\,dt.$

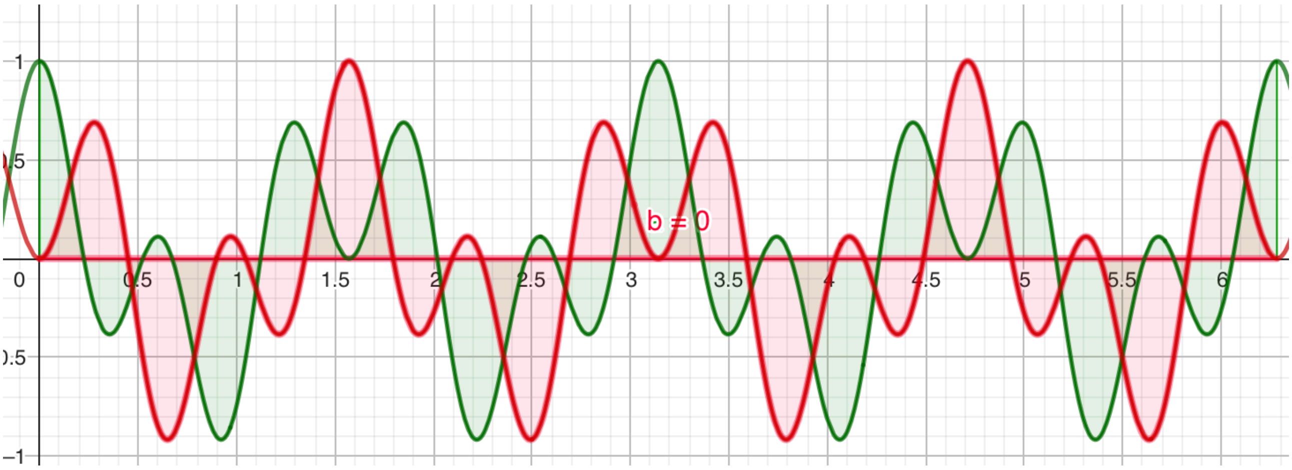
## Solution :

Nous allons procéder par intégration par parties. On dérive le premier cosinus et intègre le deuxième.
$I = \displaystyle\int_0^{2\pi} cos(pt)\,cos(qt)\,dt = \left[\frac{1}{q}cos(pt)\,sin(qt)\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{p}{q}sin(pt)\,sin(qt)\,dt = \frac{p}{q}J$ (le crochet vaut $0$.

Mais par symétrie, on peut inverser le rôle des 2 cosinus et obtenir $I = \dfrac{q}{p}J$.

On peut donc conclure $I = J = 0$

Visualisation dans Géogébra (avec $p = 3,\ q = 7$)




## Exercice 225 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ désigne la fonction de $]0;\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall t \in ]0;\pi]$, $f_n(t) = \dfrac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, en utilisant le fait que $\dfrac{sin(u)}{u}$ tend vers $1$ quand $u$ tend vers $0$, montrer que la fonction $f_n$ admet une limite, que l'on précisera, en $0$. Ceci permet de prolonger $f_n$ en une fonction continue sur $[0;\pi]$, que l'on notera encore $f_n$ et de poser $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\,dt$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+1} - I_n$ puis $I_n$.

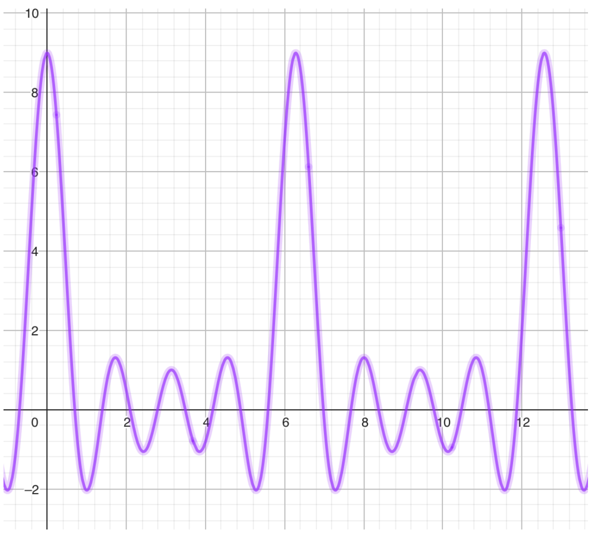
### Solution :

a) on utilise le résultat donné sous la forme quand $u \to 0$, $sin(u) \sim u$ qui nous permet d'écrire quand $t \to 0 : sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right) \sim \left(n+\dfrac{1}{2}\right)t$ et $sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \sim \dfrac{t}{2}$.

Finalement $f_n(t) \sim \dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\frac{t}{2}} = 2n+1.$

On conclut : $\lim\limits_{t\to 0} f_n(t) = 2n+1$

Représentation pour $n = 4$ :



b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} f_{n+1}(t)\,dt - \int_0^{\pi} f_n(t)\,dt = \int_0^{\pi} f_{n+1}(t) - f_n(t)\,dt$

En observant : $sin\left(\left(n+1+\frac{1}{2}\right)t\right) - sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) = 2sin\left(\frac{t}{2}\right)cos\left((n+1)t\right)$

On peut écrire : $f_{n+1}(t) - f_n(t) = 2cos\left((n+1)t\right)$

En reprenant cette simplification : $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} 2cos\left((n+1)t\right)dt = \left[\frac{2}{n+1}sin\left((n+1)t\right)\right]_0^{\pi} = 0$

Les $I_n$ sont donc toutes égales et $I_0 = \pi$.

# Exercice 226 :

Pour $x \in [0;1[$, calculer $F(x) = \int_0^x ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)dt$

Quelle est la limite de $F$ quand $x$ tend vers $1$ par valeurs inférieures.

## Solution :

En utilisant les propriétés du logarithme :

$$\forall x \in [0;1[,\ F(x) = \int_0^x ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)dt = \int_0^x ln(1+t) - ln(1-t)\,dt$$

*<u>Rappel :</u> on va utiliser un résultat à connaître, une primitive de $ln(x)$ est $xln(x) - x$ (pas de $+C$, j'ai bien mis UNE primitive).*

$$F(x) = \left[(1+t)ln(1+t) - (1+t) + (1-t)ln(1-t) - (1-t)\right]_0^x$$
$$= (1+x)ln(1+x) - 1 - x + (1-x)ln(1-x) - 1 + x + 1 + 1$$
$$= (1+x)ln(1+x) + (1-x)ln(1-x) - 4 = ln(1+x) + ln(1-x) + x\left(ln(1+x) - ln(1-x)\right)$$
$$= ln\left(1-x^2\right) + xln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

*<u>Remarque :</u> Les calculs étant un peu lourds, on vérifie a minima que $F(0) = 0$ (définition de l'intégrale) et idéalement sur la calculatrice ou Géogébra.*

Pour calculer la limite de $F$ quand $x$ tend vers $1$, nous allons repartir de la forme « développée » *(finalement c'était peut-être de laisser sous cette forme pour la question précédente, c'est plus « lisible » il me semble)* :

$F(x) = (1+x)ln(1+x) + (1-x)ln(1-x)$

Pour la forme indéterminée, on utilise la croissance comparée et $\lim_{x\to 1_-} (1-x)ln(1-x) = 0$

Donc $\lim_{x\to 1_-} F(x) = 2ln(2) = ln(4)$