Exercice 209 :

L'inégalité de Young

Soit $p \in \left]1, +\infty\right[$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel q (que l'on appelle parfois exposant conjugué de p) tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vérifier que $q > 1$. Déterminer q pour $p = 2$ et $p = 4$.

b) On fixe y dans $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$

c) Conclure que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Solution :

a) Procédons par analyse / synthèse :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{p+q}{pq} = 1 \Leftrightarrow p + q = pq$$

Donc, si q existe, $q = \frac{p}{p-1} > 1$ et est unique.

A l'inverse, $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } \exists!\ q = \frac{p}{p-1} > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$$

Pour $p = 2,\ q = 2$.

Pour $p = 4,\ q = \frac{4}{3}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$

f est dérivable comme fonction polynomiale et $f'(x) = x^{p-1} - y$

Donc f est décroissante entre $\left]0, y^{\frac{1}{p-1}}\right]$, puis croissante jusqu'en $+\infty$.

De plus, $f(0) = \frac{y^q}{q} > 0$

Et $f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}}y = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = y^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - y^q = 0$, qui est donc le minima de la fonction.

c) On déduit de la question précédente $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ce qui permet de conclure } \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2},\ xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.}$$

Exercice 231 :

L'inégalité de Hölder pour les intégrales

Les notations $p,\ q$ sont celles de l'exercice 209 (ie. $p \in \left]1, +\infty\right[, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) sur l'inégalité de Young, dont on utilise le résultat *(mais on a fait l'exercice avant !)*.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, f et g deux fonctions continues de $\left[a, b\right]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose de démontrer l'inégalité de Hölder : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leqslant \left(\displaystyle\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\displaystyle\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$

(Pour $p = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwartz)

a) En utilisant l'inégalité de Young, montrer que, pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leqslant \frac{\lambda^p}{p}\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt + \frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt$$

b) Déterminer le minimum de la fonction :

$$\psi : \lambda \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\lambda^p}{p}\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt + \frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt$$

c) Conclure

Solution :

On supposera que f et g sont non nulles sur $\left[a, b\right]$, sinon le résultat recherché est évident.

a) Considérons l'inégalité de Young avec $x = \lambda\left|f(t)\right|$ et $y = \dfrac{1}{\lambda}\left|g(t)\right|$ avec $t \in \left[a, b\right]$, on peut écrire :

$$\lambda\left|f(t)\right| \frac{1}{\lambda}\left|g(t)\right| = \left|f(t)\right|\left|g(t)\right| \leqslant \frac{\lambda^p}{p}\left|f(t)\right|^p + \frac{1}{q\lambda^q}\left|g(t)\right|^q$$

Or en intégrant sur $\left[a, b\right]$ et en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\left|g(t)\right| dt$$

Donc $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\, g(t)\, dt\right| \leqslant \dfrac{\lambda^p}{p}\displaystyle\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt + \dfrac{1}{q\lambda^q}\displaystyle\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt$

b) La fonction ψ est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\psi'(\lambda) = \lambda^{p-1}\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt - \frac{1}{\lambda^{q+1}}\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt$$

ψ' est elle-même croissante comme somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\lambda \mapsto \dfrac{1}{\lambda^{q+1}}\displaystyle\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt$ est décroissante, donc son opposée est croissante).

De plus $\displaystyle\lim_{\lambda \to 0} \psi'(\lambda) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \psi'(\lambda) = +\infty$

ψ est donc décroissante puis croissante avec un minimum quand sa dérivée s'annule, donc quand :

$$\psi'\left(\lambda_0\right) = \lambda^{p-1}\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt - \frac{1}{\lambda^{q+1}}\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt = 0$$

$$\lambda_0^{p-1}\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt = \frac{1}{\lambda_0^{q+1}}\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt \text{ ou } \lambda_0^{p+q} = \frac{\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt}{\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt}$$

La valeur minimale de ψ est donc :

$$\psi\left(\lambda_0\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt}{\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt}\right)^{\frac{p}{p+q}}\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt + \frac{1}{q}\left(\frac{\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt}{\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt}\right)^{\frac{q}{p+q}}\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt$$

$$= \frac{1}{p}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{p}{p+q}}\left(\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{1-\frac{p}{p+q}} + \frac{1}{q}\left(\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{q}{p+q}}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{1-\frac{q}{p+q}}$$

Or, $1 - \dfrac{p}{p+q} = \dfrac{q}{p+q} = \dfrac{1}{p}$ et « symétriquement », $1 - \dfrac{q}{p+q} = \dfrac{p}{p+q} = \dfrac{1}{q}$.

Donc $\psi\left(\lambda_0\right) = \dfrac{1}{p}\left(\displaystyle\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\displaystyle\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \dfrac{1}{q}\left(\displaystyle\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\displaystyle\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$

$$= \left(\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \left(\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

Donc ψ est donc décroissante puis croissante avec un minimum de

$$\left(\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

c) En reprenant cette valeur minimale dans l'inéquation de la question a), on obtient donc l'inégalité de Hölder recherchée :

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \leqslant \left(\int_a^b \left|f(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left|g(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$