Bac Maroc Maths 2023

Exercice 1

Partie I

1. a) Soit $t \in [0; +\infty[$

$$\frac{1}{1+t} - \frac{4}{(2+t)^2} = \frac{(2+t)^2 - 4(1+t)}{(1+t)(2+t)^2} = \frac{4+4t+t^2-4-4t}{(1+t)(2+t)^2} = \frac{t^2}{(1+t)(2+t)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) - \frac{1}{1+t} = \frac{(1+t)^2 + 2 - 2 - 2t}{2(1+t)^2} = \frac{(1+t)}{2(1+t)^2} = \frac{1}{2(1+t)} \geqslant 0$$

On conclut que $\forall t \in [0; +\infty[,\ \frac{4}{(2+t)^2} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$

b) De la question précédente on déduit

$$\forall x \in [0; +\infty[,\ \int_0^x \frac{4}{(2+t)^2} dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt.$$

Or, $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = ln(1+x)$,

$\int_0^x \frac{4}{(2+t)^2} dt = \left[\frac{2t}{2+t}\right]_0^x = \frac{2x}{2+x}$ (On peut vérifier rapidement en dérivant la fonction trouvée)

Et $\int_0^x \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right) = \frac{1}{2}\left[t + \frac{t}{1+t}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

Donc l'inégalité devient $\forall x \in [0; +\infty[,\ \frac{2x}{2+x} \leqslant ln(1+x) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

2. Pour $x \in]0; +\infty[$, d'après la question précédente :

$$\frac{2}{2+x} \leqslant \frac{ln(1+x)}{x} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{1+x}\right)$$

Et donc $\frac{2}{2+x} - 1 \leqslant \frac{ln(1+x)}{x} - 1 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{1+x}\right) - 1$

Par définition de g, on écrit $\frac{-x}{2+x} \leqslant g(x) - 1 \leqslant \frac{-x}{2(1+x)}$

Et finalement, $\frac{-1}{2+x} \leqslant \frac{g(x)-1}{x} \leqslant \frac{-1}{2(1+x)}$

On en déduit $\lim_{x \to 0_+} \frac{g(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$

Partie II

1. Quand $x \to +\infty$, $g(x) = \dfrac{ln(1+x)}{x} \to 0$ par croissance comparée et $e^{-x} \to 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

Géométriquement, l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C).

2. a) Quand $x \to 0$, $g(x) = \dfrac{ln(1+x)}{x} \to 1$ (on reconnait le taux d'accroissement de $t \mapsto ln(1+t)$ en 0 et donc sa limite est la limite de $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$).

Comme $e^{-x} \to 1$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ peut être prolongée par continuité en } 0 \text{ avec } f(0) = 1.}$$

b) $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{g(x)e^{-x}-1}{x} = \dfrac{g(x)e^{-x} - g(x) + g(x) - 1}{x}$ *(__Remarque :__ technique à garder en tête, on fait apparaitre la quantité souhaité, en s'assurant que c'est légitime, ici g est bien définie sur le domaine considéré).*

De l'égalité ci-dessus, on conclut bien $\boxed{\dfrac{f(x)-1}{x} = \left(\dfrac{e^{-x}-1}{x}\right) g(x) + \left(\dfrac{g(x)-1}{x}\right)}$

c) Si la limite existe, on aura bien $f'_d(0) = \lim_{x\to 0_+} \dfrac{f(x)-1}{x}$

Or, quand $x \to 0_+$,

$\dfrac{e^{-x}-1}{x} \to -1$ (dérivée de fonction usuelle)

$g(x) = \dfrac{ln(1+x)}{x} \to 1$ (cf question 2.a)

$\dfrac{g(x)-1}{x} \to -\dfrac{1}{2}$ (cf partie I)

Finalement $\dfrac{f(x)-1}{x} \to -\dfrac{3}{2}$

$$\boxed{\text{Et donc } f \text{ est bien dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = -\frac{3}{2}}$$

3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont sur cet intervalle.

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = -\frac{ln(1+x)}{x}e^{-x} + \frac{\frac{x}{1+x} - ln(1+x)}{x^2}e^{-x}$$
$$= \frac{x - (1+x)ln(1+x) - x(1+x)ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}$$

$$\boxed{\text{Ce qui donne } \forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}}$$

4. a) Posons $\forall x \in]0;+\infty[,\ h(x) = \dfrac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x) = \frac{\left(1-2x ln(1+x)-\frac{(1+x)^2}{(1+x)}\right)x^2(1+x)-\left(\left(2x(1+x)\right)+x^2\right)\left(x-(1+x)^2 ln(1+x)\right)}{\left(x^2(1+x)\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-2x ln(1+x)-x\right)x^2(1+x)-\left(\left(2x(1+x)\right)+x^2\right)\left(x-(1+x)^2 ln(1+x)\right)}{\left(x^2(1+x)\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-2ln(1+x)-1\right)x^2(1+x)-(3x+2)\left(x-(1+x)^2 ln(1+x)\right)}{x^3(1+x)^2}$$

$$= \frac{\left(-2x^2(1+x)+(3x+2)(1+x)^2\right)ln(1+x)-x^2(1+x)-x(3x+2)}{x^3(1+x)^2}$$

$$= \frac{\left(\left(x^2+5x+2\right)(1+x)\right)ln(1+x)-x^3-4x^2-2x}{x^3(1+x)^2}$$

$$= \frac{\left(\left(x^2+5x+2\right)(1+x)\right)ln(1+x)-x^3-4x^2-2x}{x^3(1+x)^2}$$

Nous devons trouver le signe du numérateur (le dénominateur étant positif).

Etudions donc la quantité $\left(\left(x^2+5x+2\right)(1+x)\right)ln(1+x)-x^3-4x^2-2x,\ \forall x \in]0;+\infty[$

Comme $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ (1+x)ln(1+x) > x$ (on dérive la fonction $x \mapsto (1+x)ln(1+x)-x$ et le résultat est immédiat).

Donc $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ \left(\left(x^2+5x+2\right)(1+x)\right)ln(1+x) > x\left(x^2+5x+2\right) \geqslant x\left(x^2+4x+2\right)$

Finalement $\forall x \in]0;+\infty[,\ h'(x) > 0.$

De la question 2.c) on tire $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Par croissance comparée on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

En tenant compte de la remarque précédente, $x-(1+x)^2 ln(1+x) \leqslant x-x(1+x) = -x^2 < 0$

Et donc $h(x) < 0$.

$$\boxed{\text{On conclut que } \forall x \in]0;+\infty[,\ -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0}$$

b) En reprenant la notation précédente, on a $f'(x) = h(x)e^{-x}$ et $\forall x \in]0;+\infty[,\ 0 < e^{-x} < 1$

$$\boxed{\text{On déduit donc } \forall x \in]0;+\infty[,\ -\frac{3}{2} < f'(x) < 0}$$

5. a) f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

b)

Partie III

1. Sur $]0; +\infty[$, considérons la fonction $k : x \mapsto f(x) - 3x$.
Cette fonction est dérivable sur cet intervalle et, d'après la partie précédente, $\forall x \in]0; +\infty[,\ k'(x) < 0$.

De plus $k(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -\infty$ (d'après les propriétés de f, donc pas de problème particulier)

On en déduit que k s'annule une unique fois sur $]0; +\infty[$.

$\boxed{\text{Et donc l'équation } f(x) = 3x \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0; +\infty[}$

2. a) En considérant le prolongement de f en 0 par $f(0) = 1$, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) > 0$.

Par hypothèse, $\beta \in \mathbb{R}_+$, donc $u_1 = \frac{1}{3} f\left(\beta\right) \geqslant 0$.

On suppose la propriété vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:
Le résultat est immédiat : $u_{n+1} = \frac{1}{3} f\left(u_n\right) \geqslant 0$

Ce qui prouve l'hérédité de la propriété.

$\boxed{\text{On conclut : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0}$

b) Par définition de α, $u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{3} f\left(u_n\right) - \frac{1}{3} f(\alpha)$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis (pour $u_n \neq \alpha$, sinon on vérifie que le résultat demandé est vrai par définition de α), on a : $\left| \frac{f\left(u_n\right) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} \right| \leqslant \frac{3}{2}$.

D'où : $\left| u_{n+1} - \alpha \right| = \frac{1}{3} \left| f\left(u_n\right) - f(\alpha) \right| \leqslant \frac{1}{2} \left| u_n - \alpha \right|$.

$\boxed{\text{En conclusion : } \left| u_{n+1} - \alpha \right| \leqslant \frac{1}{2} \left| u_n - \alpha \right|.}$

c) On utilise la question précédente pour initialiser la récurrence :

$\left|u_1-\alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_0-\alpha\right| = \frac{1}{2}\left|\beta-\alpha\right|$

Supposons la propriété vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:
On utilise à nouveau la question précédente :
$\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n-\alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}\left|\beta-\alpha\right| = \frac{1}{2^{n+1}}\left|\beta-\alpha\right|$ (La 2ème inégalité étant l'hypothèse de récurrence).
Ce qui confirme l'hérédité de la propriété.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_n-\alpha\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\left|\beta-\alpha\right|$

d) L'inégalité précédente nous permet de déduire que $\left|u_n-\alpha\right| \to 0$.

Et donc (u_n) tend vers α

Exercice 2

1. a) $\forall k \in \{1;2;\ldots;n-1\},\ e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^t dt$

Et par croissance de l'exponentielle, on peut encadrer : $\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}} < \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^t dt < \frac{1}{n}e^{\frac{k+1}{n}}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c_k \in \left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[,\ \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^t dt = \frac{1}{n}e^{c_k}$.

Et donc $\forall k \in \{1;2;\ldots;n-1\},\ \exists c_k \in \left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[,\ e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}e^{c_k}$

b) $\forall k \in \{1;2;\ldots;n-1\},\ \left(M_kM_{k+1}\right)^2 = \left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)^2 + \left(e^{\frac{k+1}{n}} - e^{\frac{k}{n}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}e^{2c_k}$

Donc $\forall k \in \{1;2;\ldots;n-1\},\ M_kM_{k+1} = \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

c) Par définition de c_k (et par la croissance de l'exponentielle, on déduit immédiatement que :

$\forall k \in \{1;2;\ldots;n-1\},\ \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leqslant M_kM_{k+1} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2. a) En sommant les inégalités précédentes, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$$

Et en changeant d'indice dans l'inégalité de droite, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}} \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}}$$

b) On reconnaît une somme de Riemann, avec $a = 0, b = 1$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{1+e^{2x}}$.

$\boxed{\text{On conclut } \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}dx}$

Exercice 3

1. a) $\boxed{1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

$\boxed{1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

b) D'après la question précédente, $\frac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2\sqrt{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$

$\boxed{\text{Et donc } \frac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{12}}}$

c) Par ailleurs, on a, $\frac{(1-i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2}} = \frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{2}}$

$$tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

$\boxed{\text{Donc } tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3}}$

d) D'après la question précédente, on trouve que $arg\,(u) = \frac{\pi}{12}$.

$$|u|^2 = 1 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 8 - 4\sqrt{3} = 8 - 2\sqrt{12} = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$$

Finalement $\boxed{u = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}}$

2. a) $x_1 = 1$ et $y_1 = 2 - \sqrt{3}$

Donc $x_1 + iy_1 = 1 + \left(2-\sqrt{3}\right)i = u$
La propriété est bien initialisée au rang 1.

Supposons la propriété vraie au rang n et étudions le rang $n+1$

Avec : $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \left(2-\sqrt{3}\right) y_n \\ y_{n+1} = \left(2-\sqrt{3}\right) x_n + y_n \end{cases}$

On a

$x_{n+1} + i y_{n+1} = x_n - \left(2-\sqrt{3}\right) y_n + i\left(\left(2-\sqrt{3}\right) x_n + y_n\right) = x_n\left(1 + i\left(2-\sqrt{3}\right)\right) + y_n\left(i - \left(2-\sqrt{3}\right)\right)$

$= x_n\left(1 + i\left(2-\sqrt{3}\right)\right) + i y_n\left(1 + i\left(2-\sqrt{3}\right)\right) = u\left(x_n + i y_n\right) = u \times u^n = u^{n+1}$

Ce qui confirme l'hérédité de la propriété.

On conclut $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n + i y_n = u^n$

b) $u^n = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^n e^{in\frac{\pi}{12}}$

Et d'après les question 1.c) et d), $1 + tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

Comme $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$, $\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

Et donc, $x_n = \frac{cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{cos^n\left(\frac{\pi}{12}\right)}$, $y_n = \frac{sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{cos^n\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

3. a) On a $A_0(1;0)$ qui est sur l'axe des réels.

Pour que A_n soit aligné avec O et A_0, il faut qu'il soit également sur l'axe des réels.
Cela signifie que $y_n = 0$ ou $sin\left(\frac{n\pi}{12}\right) = 0$ et finalement $\frac{n\pi}{12} \equiv 0\,[\pi]$.

Donc O, A_0 et A_n sont alignés si n est un multiple de 12.

b) Etudions les carrés des longueurs des côtés du triangle OA_nA_{n+1}

$$\left(OA_n\right)^2 = \frac{cos^2\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{sin^2\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

De la même façon, $\left(OA_{n+1}\right)^2 = \frac{1}{cos^{2(n+1)}\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

Et $\left(A_nA_{n+1}\right)^2 = \left(\frac{cos\left(\frac{(n+1)\pi}{12}\right)}{cos^{n+1}\left(\frac{\pi}{12}\right)} - \frac{cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{cos^n\left(\frac{\pi}{12}\right)}\right)^2 + \left(\frac{sin\left(\frac{(n+1)\pi}{12}\right)}{cos^{n+1}\left(\frac{\pi}{12}\right)} - \frac{sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{cos^n\left(\frac{\pi}{12}\right)}\right)^2$

$$= \frac{1}{cos^{2(n+1)}\left(\frac{n\pi}{12}\right)} + \frac{1}{cos^{2n}\left(\frac{n\pi}{12}\right)} - 2\frac{cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)cos\left(\frac{(n+1)\pi}{12}\right)}{cos^{2n+1}\left(\frac{\pi}{12}\right)} - 2\frac{sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)sin\left(\frac{(n+1)\pi}{12}\right)}{cos^{2n+1}\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$= \frac{1}{cos^{2(n+1)}\left(\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{1}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)} - 2\frac{cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{cos^{2n+1}\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{cos^{2(n+1)}\left(\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{1}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)} - \frac{2}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

Et donc

$$\left(OA_n\right)^2 + \left(A_nA_{n+1}\right)^2 = \frac{1}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{1}{cos^{2(n+1)}\left(\frac{\pi}{12}\right)} + \frac{1}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)} - \frac{2}{cos^{2n}\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{1}{cos^{2(n+1)}\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \left(OA_{n+1}\right)^2$$

D'après le théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

Exercice 4

1. a) Comme p est premier et impair, il est premier avec 2.

Donc, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 \left[p\right]$

b) Utilisons la remarque donnée dans l'énoncé : $\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right) = 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \left[p\right]$

Comme p est premier, d'après le théorème de Gauss, l'un des 2 membre divise p.

Donc $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \left[p\right]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \left[p\right]$

2. a) Si x est solution de (E), $\exists k \in \mathbb{N},\ x^2 = kp + 2$ ($k \in \mathbb{N}$, car si $k < 0, kp + 2 < 0$).
Supposons par l'absurde que x et p ne sont pas premiers entre : $\exists n \in \mathbb{Z},\ x = np$.

D'où $n^2p^2 = kp + 2$ ou $n^2p^2 - kp = p\left(n^2p - k\right) = 2$, ce qui est impossible.

Donc Si x est solution de (E), x et p sont premiers entre eux.

b) Si $x^2 \equiv 2 \left[p\right]$, $\left(x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \left[p\right]$

En utilisant le résultat précédent, et le petit théorème de Fermat $x^{p-1} \equiv 1 \left[p\right]$

Et donc $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \left[p\right]$

3. Les indications permettent de conclure immédiatement avec le théorème de Gauss :

$p \mid pC_{p-1}^{k-1}$ et $pC_{p-1}^{k-1} = kC_p^k$.

Comme $p \nmid k$, on conclut $p \mid C_p^k$

4. a) $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}}e^{in\frac{\pi}{4}}$.

Ce qui donne bien $(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}} sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$

b) En utilisant la formule donnée $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Donc par identification : $2^{\frac{p}{2}} cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k}$ et $\forall k \in \{0;1;\ldots;n-1\},\ C_p^{2k} \in \mathbb{N}$.

Et $2^{\frac{p}{2}} cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$

De plus, d'après la question 3., $\forall k \in \{1;2;\ldots;n-1\},\ p \mid C_p^{2k}$ et $C_p^0 = 1$.

On a donc $2^{\frac{p}{2}} cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1\ [p]$

5. On utilise la question 2. qui impose $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$ quand (E) possède des solutions.

Or, $2^{\frac{5-1}{2}} = 4 \equiv -1\ [5]$

Plus généralement, avec $p = 8k+5,\ k \in \mathbb{N} : 2^{\frac{5+8k-1}{2}} = 2^{4k+2} = 4^{2k+1} \equiv -1\ [p]$
(On vérifie que les puissances de 4 se terminent par 6 pour les puissances paires et 4 pour les impaires).

Remarque : on arrive au même résultat en utilisant la congruence de la question précédente sur le cosinus. Personnellement, je trouve ça un peu plus lourd par rapport à l'utilisation des puissances de 4 !

Donc si $p \equiv 5\ [8]$, (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Partie I

1. On vérifie que $E \subset M_2(\mathbb{R})$ et $O = M(0,0) \in E$.

Il faut s'assurer de la stabilité de E par l'addition, avec $(a,b,x,y) \in \mathbb{R}^4$:

$$M(x,y) + M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & b \\ 2b & a-b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x+y+a+b & y+b \\ 2(y+b) & x+a-y-b \end{pmatrix} = M(a+x, b+y) \in E$$

Ainsi E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$.

2. Suite à la question précédente, il faut montrer la stabilité par multiplication par un scalaire.
On considère $(a,b,x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^5$

$$M(x,y)+\lambda M(a,b)=\begin{pmatrix}x+y & y\\ 2y & x-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda a+\lambda b & \lambda b\\ 2\lambda b & \lambda a-\lambda b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x+y+\lambda a+\lambda b & y+\lambda b\\ 2(y+\lambda b) & x+\lambda a-y-\lambda b\end{pmatrix}=M(\lambda a+x,\lambda b+y)\in E$$

Et E est bien un sous-espace vectoriel de $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$

3. a) Soient $(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4$, $M(x,y)\times M(x',y')=\begin{pmatrix}x+y & y\\ 2y & x-y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x'+y' & y'\\ 2y' & x'-y'\end{pmatrix}$
$$=\begin{pmatrix}(x+y)(x'+y')+2yy' & (x+y)y'+y(x'-y')\\ 2y(x'+y')+2y'(x-y) & 2yy'+(x-y)(x'-y')\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}xx'+xy'+yx'+3yy' & xy'+yx'\\ 2yx'+2xy' & 3yy'+xx'-yx'-xy'\end{pmatrix}=M(xx'+3yy',xy'+yx')$$

b) D'après le résultat précédent, E est stable par la multiplication et commutatif (par symétrie du résultat).
L'unité $I=M(1,0)\in E$. On peut affirmer que E est un sous-anneau de $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$.

Donc E est anneau unitaire commutatif.

4. a) D'après la formule de la question précédente, on a :
$$M\left(\sqrt{3},1\right)\times M\left(-\sqrt{3},1\right)=M\left(-3+3,-\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=M(0,0)=O$$

On confirme $M\left(\sqrt{3},1\right)\times M\left(-\sqrt{3},1\right)=O$

b) La question précédente nous indique le l'anneau E n'est pas intègre et donc n'est pas un corps.
Or tout corps est un anneau intègre *(<u>Remarque :</u> on prouve cela en utilisant le fait que tous les éléments non nuls d'un corps sont inversibles)*.

Donc E n'est pas un corps.

Partie II

1. Avec $(x,y)\in\mathbb{Q}^{*2}$, $x+y\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\sqrt{3}=-\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Q}$

Ce qui est absurde car $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Donc $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2,\ x+y\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x=y=0$

2. On vérifie que $F-\{0\}\subset\mathbb{R}^*$ et $1\in F$
Il faut s'assurer de la stabilité de $F-\{0\}$ par la multiplication :
$$\forall(x,x',y,y')\in\mathbb{Q}^4,\ \left(x+y\sqrt{3}\right)\left(x'+y'\sqrt{3}\right)=xx'+3yy'+(xy'+yx')\sqrt{3}\in F$$

Il faut également vérifier que l'inverse d'un élément de F est bien dans F :
$\dfrac{1}{x+y\sqrt{3}}=\dfrac{x-y\sqrt{3}}{x^2-3y^2}\in F$ (l'irrationalité de $\sqrt{3}$ nous assure là aussi que le dénominateur est non nul).

$\boxed{\text{Donc } F-\{0\} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}^*, \times)}$

3. a) D'après la question 1. si $(x,y) \neq (0{,}0)$, $\varphi(x,y) \neq O$

$\boxed{\text{Et } \varphi(F-\{0\}) = G-\{O\}}$

b) D'après la question 2. on reconnaît que le résultat de la multiplication dans F a la même forme que celle dans E vue dans la question 3 de la partie I.
On a donc $\varphi\left(\left(x+y\sqrt{3}\right)\times\left(x'+y'\sqrt{3}\right)\right) = M(x,y)\times M(x',y')$

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ et un homomorphisme de } (F-\{0\},\times) \text{ dans } (E,\times)}$

c) La commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$ assure celle dans $F-\{0\}$.
$\varphi\left(\left(x'+y'\sqrt{3}\right)\times\left(x+y\sqrt{3}\right)\right) = M(x',y')\times M(x,y)$
Et $\varphi\left(\left(x'+y'\sqrt{3}\right)\times\left(x+y\sqrt{3}\right)\right) = \varphi\left(\left(x+y\sqrt{3}\right)\times\left(x'+y'\sqrt{3}\right)\right)$

Donc $M(x,y)\times M(x',y') = M(x',y')\times M(x,y)$

Par le même raisonnement (via les antécédents par φ, on trouve que les éléments de $G-\{O\}$ ont un inversé dans $G-\{O\}$.

$\boxed{\text{Ce qui permet de conclure que } (G-\{O\},\times) \text{ est un groupe commutatif}}$

4. $(G,+)$ est un sous-groupe de $(E,+)$
La question précédente assure que $(G,+,\times)$ est un anneau intègre dont tous les éléments non nuls sont inversibles. De plus il est commutatif.

$\boxed{\text{On conclut que } (G,+,\times) \text{ est un corps commutatif.}}$