Exercice 1 : On définit (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^1 t^n e^t dt$

1- Calculer u_0.
2- Montrer que (u_n) est positive est décroissante.
3- $\forall n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
4- Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution :

1- $u_0 = \int_0^1 t^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t\right]_0^1 = e - 1.$

2- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0;1],\ t^n e^t \geqslant 0,$ donc $\int_0^1 t^n e^t dt \geqslant 0.$

Donc (u_n) est positive.

Par linéarité de l'intégrale, on peut écrire :
$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt - \int_0^1 t^n e^t dt = \int_0^1 t^{n+1} - t^n e^t dt = \int_0^1 t^n(t-1)e^t dt.$
Or, $\forall t \in [0;1],\ t - 1 \leqslant 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et (u_n) est décroissante.

3- $u_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt = \left[t^{n+1} e^t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n e^t dt = e - (n+1)u_n$

4- D'après la question 2, (u_n) est décroissante et minorée donc converge.
D'après la question précédente on peut écrire : $u_n = \dfrac{e - u_{n+1}}{n+1}$ avec $u_{n+1} \leqslant e - 1.$
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$

On pouvait aussi utiliser : $\forall t \in [0;1],\ t^n e^t \leqslant e t^n,$ donc $u_n \leqslant e\int_0^1 t^n dt$

Exercice 2 : On définit (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx$

1- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ -x^2 \leqslant -2x + 1$
2- Montrer que (u_n) converge

Solution :
1- Étudions la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1.$
On a $\Delta = 0$ et la fonction est donc positive sur $\mathbb{R}$. (La solution double est $x = 1$).
Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ -x^2 \leqslant -2x + 1.$

2- Comme la fonction exponentielle est croissante, on a :
$$\int_0^n e^{-x^2} dx \leqslant \int_0^n e^{-2x+1} dx = e\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^n = \frac{e}{2}(1 - e^{-2n}) < \frac{e}{2}.$$

La fonction exponentielle étant strictement positive, la suite est trivialement croissante.
La suite est croissante et majorée donc convergente.

Solution alternative :

On étudie la différence entre 2 termes de la suite :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m < n,\ u_n - u_m = \int_0^n e^{-x^2} dx - \int_0^m e^{-x^2} dx = \int_m^n e^{-x^2} dx \leqslant \frac{1}{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} e^{-k^2} \leqslant e^{-m^2}.$$

D’après le critère de Cauchy, pour ϵ donné en prenant $e^{-N^2} \leqslant \epsilon \Leftrightarrow e^{N^2} \geqslant \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow N \geqslant \sqrt{ln(\frac{1}{\epsilon})}$, on vérifie que la suite est convergente.