Exercice : Intégrales de Wallis.

On définit : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx$

1- Calculer I_0, I_1 et I_2

2- a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante

b) En déduire qu'elle est convergente

3- Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}

4- Montrer que nI_nI_{n-1} et constant et préciser sa valeur

Solution :

1- $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx \quad = \quad \left[-cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

En intégrant par parties on a $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)dx \quad = \left[-cos(x)sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} - cos^2(x)dx$

Or : $\left[-cos(x)sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ et donc $I_2 \ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)dx.$

On peut donc écrire : $2I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)dx \ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$

Et $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

2-

a) Pour étudier les variations de (I_n), on étudie :

$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n+1}(x) - sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)(sin(x) - 1)dx.$

Comme $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $sin^n(x) \geqslant 0$ et $sin(x) - 1 \leqslant 0$, on conclut $I_{n+1} - I_n \leqslant 0.$

<u>Donc (I_n) est décroissante.</u>

b) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, <u>donc convergente</u>.

3- On utilise l'intégration par parties comme pour calculer I_2.

On trouve : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx = \left[-cos(x)sin^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)sin^{n-2}(x)cos^2(x)dx.$

La première partie s'annule et $I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)cos^2(x)dx.$

Par ailleurs, en écrivant $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)sin^2(x)dx$, on trouve :

$nI_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)sin^2(x)dx \ + \ (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)cos^2(x)dx$

$nI_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)(sin^2(x) + cos^2(x))dx$

Donc <u>$nI_n = (n-1)I_{n-2}$</u> ou $I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$. (On vérifie que la formule fonctionne pour I_0 et I_2)

4- A partir de la formule précédente, on obtient directement : $n\,I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}$.
On calcule la valeur à partir de la question 1 : $I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (là encore, on vérifie que la valeur fonctionne pour $2 I_2 I_1$).