Exercice 45 :

a) Si n est dans $\mathbb{N}^*$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Quelle est la limite de cette expression quand n tend vers $+\infty$?

b) Si n est un entier $\geqslant 2$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

Quelle est la limite de cette expression quand n tend vers $+\infty$?

Solution :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n} ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n} ln\left(k+1\right)-ln\left(k\right)=ln\left(n+1\right)$

On déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=+\infty$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n} ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n} ln\left(\frac{\left(k+1\right)\left(k-1\right)}{k^2}\right)=\sum_{k=2}^{n}\left(ln\left(k+1\right)+ln\left(k-1\right)-2ln\left(k\right)\right)$

$\displaystyle=\sum_{k=2}^{n} ln\left(k+1\right)-ln\left(k\right)-\sum_{k=2}^{n} ln\left(k\right)-ln\left(k-1\right)=ln\left(n+1\right)-ln\left(2\right)-ln\left(n\right)=ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-ln\left(2\right)$

quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{n+1}{n}\to 1$ et $ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\to 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=-ln\left(2\right)$.

<u>Remarque :</u> la fonction ln est définie pour $x>0$, cependant pour $0<x<1$, $ln(x)<0$

Exercice 46 :

Déterminer 3 réels $a,\ b,\ c$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0;-1;-2\},\ \dfrac{1}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$.

En déduire une expression simple de U_n, définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$.

Déterminer la limite en $+\infty$ de $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0;-1;-2\},\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}=\dfrac{a\left(x+1\right)\left(x+2\right)+bx\left(x+2\right)+cx\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)\left(x+2\right)}$

On cherche donc
$a\left(x+1\right)\left(x+2\right)+bx\left(x+2\right)+cx\left(x+1\right)=a\left(x^2+3x+2\right)+b\left(x^2+2x\right)+c\left(x^2+x\right)=1$

Comme $a\left(x^2+3x+2\right)+b\left(x^2+2x\right)+c\left(x^2+x\right)=\left(a+b+c\right)x^2+\left(3a+2b+c\right)+2a$,

on doit résoudre le système : $\begin{cases}a+b+c=0\\3a+2b+c=0\\2a=1\end{cases}$

©antoine.remond.maths@gmail.com

On déduit immédiatement $a = \dfrac{1}{2}$ et le système devient : $\begin{cases} b = -\frac{1}{2} - c \\ -2c + c = -\frac{3}{2} + 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Finalement $a = \dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{1}{2}$ et $b = -1$, d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0; -1; -2\},\ \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}.$$

Intégrons cette égalité dans la définition de U_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$$

On a donc 2 sommes télescopiques :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Finalement, $U_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

On en déduit donc $\lim\limits_{n \to +n} U_n = \dfrac{1}{4}$.

©antoine.remond.maths@gmail.com