Exercice 23 :

On se propose de déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)+f(x-y) = 2\left(f(x)+f(y)\right)$

a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est paire.
b) Montrer que f'' est constante.
c) Conclure

Solution :

a) En particulier pour $x = y = 0,\ f(0)+f(0) = 2\left(f(0)+f(0)\right)$
Donc $2f(0) = 4f(0)$ et $f(0) = 0$

En utilisant ce résultat : $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)+f(-y) = 2\left(f(0)+f(y)\right) = 2f(y)$
Ce qui permet de conclure que $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = f(-y)$ et que f est bien paire.

b) Étudions le taux d'accroissement correspondant à f'' :

$$\frac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} = \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} = \frac{2\left(f(x+h)+f(h)\right)-2f(x+h)}{h^2} = 2\frac{f(h)}{h^2}$$

(On utilise $f(x+2h)+f(x) = 2\left(f(x+h+h)+f(x+h-h)\right)$).

Comme $f''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h}-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2\dfrac{f(h)}{h^2}$ est indépendant de x, on conclut que f'' est constante. (Car f est définie comme 2 fois dérivable).

c) De la question précédente, on conclut que $\exists k \in \mathbb{R}^*,\ f : x \mapsto kx^2$.

Exercice 24 :

f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$.

a) Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
b) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ calculer $f(nx)$ en fonction de n et $f(x)$
c) Soit $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$.
d) Expliquer pourquoi tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Conclure que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.

Solution :

a) On peut écrire : $\forall y \in \mathbb{R},\ f(0+y) = f(y) = f(0)+f(y)$ et $f(0) = 0$
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+(-x)) = 0 = f(x)+f(-x)$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.
Ce qui prouve bien que f est impaire.

b) Procédons par récurrence.
Initialisation pour $n = 2$: $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$.

Hérédité : supposons qu'au rang n $\forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$ et étudions le rang $n+1$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left((n+1)x\right) = f(x+nx) = f(x)+nf(x) = (n+1)f(x)$

Ainsi, on conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(nx) = nf(x)$

c) De la formule précédente, on trouve immédiatement avec $x = 1$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1) = na$.
On étend la formule à $\mathbb{Z}$ car f est impaire.

Si $\forall x \in \mathbb{Q},\ x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On a d'une part : $f\left(qx\right) = qf(x)$
Et d'autre part : $f\left(qx\right) = f\left(p\right) = pa$
Finalement, $f(x) = \dfrac{p}{q}a = xa$.

d) Pour tout réel, on peut créer une suite avec son écriture décimal à 10^{-n} près.
ie. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor x \times 10^n \rfloor}{10^n}$

e) En écrivant pour tout réel $x = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{q_n}$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{p_n}{q_n}\right) = \dfrac{p_n}{q_n}a$.
Par continuité de f on peut passer à la limite et conclure $f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{q_n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{p_n}{q_n}a$.
Ou plus simplement : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.
Ainsi f est une fonction linéaire.