Exercice 340 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0$

b) $z|z| = 2 + i\sqrt{3}$

Solution :

Pour les 2 équations, nous écrivons $z = a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

On rappelle que $|z|^2 = a^2 + b^2$.

a) $2z - |z|^2 + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2(a+ib) - (a^2+b^2) + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2a - a^2 - b^2 + 1 + 2ib - 2i = 0$

Procédons alors par identification :

$$\begin{cases} 2a - a^2 - b^2 + 1 = 0 \\ 2b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - a^2 = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(2-a) = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

On trouve donc 2 solutions $z_1 = i$ et $z_2 = 2 + i$

b) Si 2 nombres complexes sont égaux, alors leurs modules sont égaux.

Donc $|z|\,|z| = |z|^2 = \left|2 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{7}$ ou $|z| = \sqrt{\sqrt{7}}$ (car $|z| \geqslant 0$).

L'équation devient alors : $z|z| = 2 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow (a+ib)\sqrt{\sqrt{7}} = 2 + i\sqrt{3}$.

L'identification est immédiate et $z = \dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{7}}} + i\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{7}}}$.

Exercice 341 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 8i = |z|^2 - 2$

Solution :

Comme habituellement, écrivons $z = a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+ib)^2 + 8i = a^2 + b^2 - 2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab + 8i = a^2 + b^2 - 2 \Leftrightarrow 2i(ab + 4) + 2(1 - b^2) = 0$$

Par identification : $\begin{cases} ab = -4 \\ b^2 = 1 \end{cases}$

Il y a donc 2 solutions, $z_1 = -4 + i$ et $z_2 = 4 - i$.

Exercice 342 :

Déterminer l'image de $\mathbb{C}$ par la fonction f définie par : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z + |z|$

Solution :

Commençons par s'intéresser aux éléments de $\mathbb{R}$:

- $\forall z \in \mathbb{R}_-,\ |z| = -z$ et $f(z) = 0$
- $\forall z \in \mathbb{R}_+,\ |z| = z$ et $f(z) = 2z$

Si on écrit $z = a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b \neq 0, f(z) = a + ib + \sqrt{a^2+b^2} = a + \sqrt{a^2+b^2} + ib$.

Posons $Z = A + iB$ et cherchons son antécédent.

On a immédiatement $B = b$ pour la partie imaginaire.

Pour la partie réelle on a $A = a + \sqrt{a^2 + B^2}$ ou $A - a = \sqrt{a^2 + B^2}$.
Ce qui impose $A > 0$
En élevant au carré on obtient $(A - a)^2 = A^2 + 2Aa + a^2 = a^2 + B^2$
Ce qui donne $a = \dfrac{B^2 - A^2}{2A}$ et impose $A \neq 0$ mais O est bien solution, donc à ne pas oublier.

En conclusion, aucune image par f ne peut être imaginaire pur ou avec une partie réelle négative et $f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\} \cup \{0\}$.

Exercice 343 :

a) Soient z un nombre complexe, M son image dans le plan et M' le symétrique de M par rapport à (Oy).
b) Même question avec M'', symétrique de M par rapport à O.

Solution :

En considérant $z = a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, les coordonnées de M sont $(a; b)$
a) Les coordonnées de M' sont $(-a; b)$ et son affixe est $z' = -a + ib$
b) Les coordonnées de M'' sont $(-a; -b)$ et son affixe est $z'' = -z$

Exercice 344 :

Décrire les ensembles suivants de nombres complexes. (L'exercice propose de représenter ces ensembles. Je ne le ferai pas ici, mais j'encourage évidemment les élèves à le faire pour se fixer au mieux les images en tête).
$E = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) = 4\}$ $F = \{z \in \mathbb{C};\ Im(z) = -2\}$ $G = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) = Im(z)\}$
$H = \left\{z \in \mathbb{C};\ |z - 3 + i| = 2\right\}$ $I = \{z \in \mathbb{C};\ Im(z) > 0\}$ $J = \{z \in \mathbb{C};\ 2 \leqslant Re(z) < 4\}$

Solution :

Dans le plan complexe, l'axe des abscisses correspond à l'axe des réels et l'axe des ordonnées correspond à l'axe des imaginaires.
E est la droite d'équation $x = 4$.
F est la droite d'équation $y = -2$.
G est la droite d'équation $y = x$.
H est le cercle de centre $A(3; -1)$ et de rayon 2.
I est le demi-plan supérieur (points d'ordonnées strictement positives)
J est la bande verticale située entre les droites d'abscisses $x = 2$ (incluse) et $x = 4$ (non incluse).

Exercice 345 :

a) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - i| = |z + i|$ par 2 méthodes :
- Par un calcul en écrivant z sous la forme algébrique
- En interprétant géométriquement la relation

b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - i| < |z + i|$

Solution :

a) Ecrivons $z = a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$
$|z - i| = |z + i| \Leftrightarrow |z - i|^2 = |z + i|^2$ car les quantités sont positives.
$|a + ib - i|^2 = |a + ib + i|^2 \Leftrightarrow a^2 + (b - 1)^2 = a^2 + (b + 1)^2 \Leftrightarrow (b - 1)^2 = (b + 1)^2$

Ceci est équivalent à $b = 0$ et $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est donc $\mathbb{R}$.

Dans la plan, la relation revient à rechercher les points à la même distance des points d'affixe i et $-i$, c'est à dire la médiatrice du segment reliant ces 2 points. C'est bien la droite des réels (droite d'équation $y = 0$).

b) L'inégalité correspond aux points situé sous la droite des réels, donc d'ordonnées strictement négative (l'inégalité étant stricte).

Exercice 346 :

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\left|z\right| = \left|z-1\right| = 1$.
Interpréter géométriquement.

Solution :

Comme dans la plupart des exercices précédents : $z = a + ib,\ \left(a, b\right) \in \mathbb{R}^2$.
On élève au carré l'égalité pour des nombres positifs.
On cherche donc à résoudre : $a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 = 1$

Considérons la première partie : $a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 = a^2 + 1 - 2a + b^2$.
Ce qui impose : $1 - 2a = 0$ ou $a = \dfrac{1}{2}$.
En utilisant la 2ème partie : $a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow b = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Les affixes des points sont donc $z_1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Géométriquement, les solutions sont les points d'intersection entre les cercles de centre $O(0;0)$ et de rayon 1 et de centre $(0;1)$ et également de rayon 1.
On déduit immédiatement que ces points sont sur la médiatrice des 2 centres, donc $a = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 347 :

Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\dfrac{1+z}{\bar{z}}$ soit réel.
Quel est l'image de cet ensemble ?

Solution :

Une nouvelle fois $z = a + ib,\ \left(a, b\right) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{1+z}{\bar{z}} = \frac{1+a+ib}{a-ib} = \frac{\left(1+a+ib\right)\left(a+ib\right)}{\left(a-ib\right)\left(a+ib\right)} = \frac{a+ib+a^2+iab+iab-b^2}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{a+a^2-b^2+i\left(b+2ab\right)}{a^2+b^2}.$$

Comme on veut que l'image de z soit dans $\mathbb{R}$, on veut que $b + 2ab = b\,(1+2a) = 0$.

On a donc $b = 0$ (avec $a \neq 0$) ie $z \in \mathbb{R}^*$ ou $1 + 2a = 0$ ie $a = -\dfrac{1}{2}$ et $z = -\dfrac{1}{2} + ib,\ b \in \mathbb{R}$.

Géométriquement, l'ensemble des solutions correspond à l'axe des réels privé de 0 et de la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 348 :

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 + 3z^2 + 3z + 9$ soit réel.
Quel est l'image de cet ensemble ?

Solution :

On remarque que -3 est une racine « évidente » du polynôme.
On a donc : $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = (z+3)\left(z^2+3\right) = (z+3)\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(z-i\sqrt{3}\right)$.
On utilise l'écriture algébrique $z = a + ib,\ \left(a,b\right) \in \mathbb{R}^2$

En factorisant, on va s'affranchir d'une partie du développement :

$$\left(a+3+ib\right)\left(a+i\left(b+\sqrt{3}\right)\right)\left(a+i\left(b-\sqrt{3}\right)\right)$$
$$= A + i\left[(a+3)\left(b+\sqrt{3}\right) + (a+3)\left(b-\sqrt{3}\right) + ab + ab + a\left(b+\sqrt{3}\right) + a\left(b-\sqrt{3}\right)\right]$$

Avec $A \in \mathbb{R}$ (on n'a pas besoin de travailler sur la partie réelle de z donc pas besoin de donner son écriture).
On va chercher les valeurs de a et b pour annuler la partie imaginaire de z.

$$(a+3)\left(b+\sqrt{3}\right) + (a+3)\left(b-\sqrt{3}\right) + 2ab + a\left(b+\sqrt{3}\right) + a\left(b-\sqrt{3}\right)$$
$$= ab + a\sqrt{3} + 3b + 3\sqrt{3} + ab - a\sqrt{3} + 3b - 3\sqrt{3} + 2ab + ab + a\sqrt{3} + ab - a\sqrt{3}$$
$$= 6ab + 6b = 6b\,(a+1).$$

On retrouve bien qu'une partie des solutions est $\mathbb{R}$ ($b = 0$).
Le reste des solutions correspond à $a = -1$.

Géométriquement, on a la droite réelle et la droite d'équation $x = -1$.

Exercice 349 :

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 - 2i = \bar{z}^2 + 2i$.
Quel est l'image de cet ensemble ?

Solution :

Commençons par réarranger l'égalité proposée :
$z^2 - 2i = \bar{z}^2 + 2i \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 = 4i \Leftrightarrow (z+\bar{z})(z-\bar{z}) = 4i.$

Reprenons l'usuel $z = a + ib,\ \left(a,b\right) \in \mathbb{R}^2$:
$(z+\bar{z})(z-\bar{z}) = 2a \times 2ib = 4iab$

On cherche finalement les réels $a,\ b$ tels que $4iab = 4i$ et le résultat est immédiat $b = \dfrac{1}{a}$ avec $a \neq 0,\ b \neq 0.$

Géométriquement, on retrouve évidemment l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.