Du Lycée aux CPGE

Exercice 1 :

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$

Solution :

Montrons le résultat par récurrence :

Initialisation : $1^3 = 1 = \left(\dfrac{1 \times 2}{2}\right)^2$

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang n et étudions le rang $n+1$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

Or

$$\left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = (n+1)^2\left(\frac{(n+2)}{2}\right)^2$$

Et donc $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right)^2$, ce qui nous assure de l'hérédité de la propriété.

On conclut donc que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 2 :

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$

Solution :

Le résultat ne semblant pas évident, étudions les premiers rangs.

$n = 0 : 5^{2^0} = 5 = 1 + 4 \ = 1 + 1 \times 2^{0+2}$. On a bien l'existence de $\lambda_0 = 1$.

$n = 1 : 5^{2^1} = 25 = 1 + 24 \ = 1 + 3 \times 2^{1+2}$ et $\lambda_1 = 3$

$n = 2 : 5^{2^2} = 625 = 1 + 624 \ = 1 + 39 \times 2^{2+2}$ et $\lambda_2 = 39$

Ceci permet d'initialiser la propriété.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:

$$5^{2^{n+1}} = \left(5^{2^n}\right)^2 = \left(1 + \lambda_n 2^{n+2}\right)^2 = 1 + \lambda_n^2 2^{2n+4} + 2\lambda_n 2^{n+2} = 1 + 2^{n+3}\left(\lambda_n^2 2^{n+1} + \lambda_n\right).$$

Or $\lambda_n^2 2^{n+1}$ est pair et λ_n est impair par hypothèse. Donc $\lambda_n^2 2^{n+1} + \lambda_n$ est impair, ce qui permet de conclure en posant $\lambda_{n+1} = \lambda_n^2 2^{n+1} + \lambda_n$. *(On vérifie que la formule s'applique bien aux résultats trouvés dans l'initialisation)*

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists \lambda_n \in 2\mathbb{N}+1$ tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$.

Exercice 3 :

Soit a et b 2 réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + b$.

On se propose de calculer u_n en fonction de n et u_0.

a) Traiter le cas $a = 1$.
On suppose maintenant $a \neq 1$
b) Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note l la solution.
c) On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - l$.
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et conclure.
d) A quelles conditions sur a et u_0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Solution :

a) Pour cette question, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + b$.
On montre alors par une récurrence triviale que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nb$
(u_n) diverge vers $\pm\infty$ en fonction du signe de b, sauf si $b = 0$ auquel cas la suite est constante.

b) On sait que $a \neq 1$ (ce qui justifiera la division à venir !).
$x = ax + b \Leftrightarrow x(1-a) = b$, ce qui donne $l = \dfrac{b}{1-a}$

c) Calculons : $v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - al - b = a\left(u_n - l\right) = av_n$.
$\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison a.
On sait que dans ce cas que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a^n v_o$ ce qui permet d'écrire $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a^n\left(u_0 - l\right) + l$.

d) Pour que $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il faut donc que $a < 1$ ou $u_0 = l$.

Exercice 4 :

La suite réelle $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $t_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = \dfrac{\sqrt{t_n}}{e}$.
En appliquant l'exercice précédent à la suite $\left(ln\left(t_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, exprimer t_n en fonction de n et étudier la convergence de $\left(t_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

Procédons comme proposé, $\forall n \in \mathbb{N},\ ln\left(t_{n+1}\right) = ln\left(\dfrac{\sqrt{t_n}}{e}\right) = \dfrac{1}{2}ln\left(t_n\right) - 1$.

En posant $u_n = ln\left(t_n\right)$, on se retrouve dans le cadre d'une suite arithmético-géométrique étudiée dans l'exercice précédent :
$u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 1$

Et en gardant la même notation, $l = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\left(u_0 + 2\right) - 2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} - 2$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$, ce qui permet de conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{1}{e^2}$

Exercice 5 :

La suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer x_n en fonction de n.

Solution :

Etudions les premier rangs :

$n = 1 : x_1 = x_0 = 1$
$n = 2 : x_2 = x_1 + x_0 = 1 + 1 = 2$
$n = 3 : x_3 = x_2 + x_1 + x_0 = 2 + 1 + 1 = 4$
$n = 4 : x_4 = x_3 + x_2 + x_1 + x_0 = 4 + 2 + 1 + 1 = 8$

On a l'intuition que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 2^{n-1}$. Les premiers rangs ci-dessus nous servent d'initialisation.

Hérédité : Considérons que la propriété proposée soit vrai jusqu'au rang n et étudions le rang $n+1$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = 1 + \frac{1-2^n}{1-2} = 1 + 2^n - 1 = 2^n$$

Et la propriété est bien vérifiée au rang $n+1$.

On conclut donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 2^{n-1}$.

Exercice 6 :

Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$.

Calculer $f\left(f(x)\right),\ f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ et généraliser.

Solution :

Effectuons les calculs demandés :

$$f\left(f(x)\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}}{\sqrt{1+c\frac{x^2}{1+cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}\sqrt{\frac{1+2cx^2}{1+cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}$$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}}}{\sqrt{1+2c\frac{x^2}{1+2cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2cx^2}\sqrt{\frac{1+4cx^2}{1+2cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+4cx^2}}$$

En notant $f^{(n)}$ la composition de n fois f, avec les calculs précédents, on initialise la proposition :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2^{n-1}cx^2}}$.

Hérédité : si la proposition est vraie au rang n, alors au rang $n+1$:

$$f^{(n+1)}(x) = f\left(f^{(n)}(x)\right) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2^{n-1}cx^2}}}{\sqrt{1+c\left(\frac{x}{\sqrt{1+2^{n-1}cx^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+2^{n-1}cx^2}}}{\sqrt{1+2^{n-1}c\frac{x^2}{1+2^{n-1}cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2^{n-1}cx^2}\sqrt{\frac{1+2^ncx^2}{1+2^{n-1}cx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2^ncx^2}}$$

Ainsi la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

On peut conclure : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+2^{n-1}cx^2}}$.

Exercice 7 :

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2,\ u_1 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$

Solution :

Nous allons démontrer par récurrence la propriété proposée.

Initialisation : la propriété est bien vraie pour $u_0 = 2 = 2^0 + 3^0$ et $u_1 = 5 = 2^1 + 3^1$.

Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$ et étudions le rang $n+2$:
$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n = 5\left(2^{n+1} + 3^{n+1}\right) - 6\left(2^n + 3^n\right) = 5 \times 2^{n+1} + 5 \times 3^{n+1} - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n$
$= 2^{n+1}\left(5-3\right) + 3^{n+1}\left(5-2\right) = 2^{n+2} + 3^{n+2}$
Ainsi la propriété est vraie au rang $n+2$ et on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 8 :

La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}}$.
Deviner une formule donnant u_n en fonction de n, puis la démontrer par récurrence.

Solution :

Etudions les premiers rangs pour deviner la formule.

$n = 2 : u_2 = \dfrac{u_1^2}{u_0} = 4 = 2^2$
$n = 3 : u_3 = \dfrac{u_2^2}{u_1} = \dfrac{16}{2} = 8 = 2^3$

A partir de ces éléments qui servent d'initialisation, tâchons de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n$.

Supposons que la propriété soit vraie pour les rangs $n-1$ et n et considérons le rang $n+1$:
$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}} = \left(\dfrac{\left(2^n\right)^2}{2^{n-1}}\right) = \dfrac{2^{2n}}{2^{n-1}} = 2^{n+1}$.
Et la propriété est bien vérifiée au rang $n+1$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n$.

Exercice 9 :

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = n$.
Exprimer u_n en fonction de n.

Solution :

Etudions les premiers rangs :
$n = 1 : u_1 + 0 = 1$
$n = 2 : u_2 + u_1 = u_2 + 1 = 2$ et $u_2 = 1$
$n = 3 : u_3 + u_2 = u_3 + 1 = 3$ et $u_3 = 2$
$n = 4 : u_4 + u_3 = u_4 + 2 = 4$ et $u_4 = 2$
$n = 5 : u_5 + u_4 = u_5 + 2 = 5$ et $u_5 = 3$

Prouvons par récurrence, comme initialisé ci-dessus que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{2k} = k$ et $u_{2k+1} = k + 1$.

Hérédité : supposons la propriété vraie pour k et étudions le rang $k + 1$:
$u_{2k+2} + u_{2k+1} = u_{2k+2} + k + 1 = 2k + 2$ et $u_{2k+2} = k + 1$
$u_{2k+3} + u_{2k+2} = u_{2k+3} + k + 1 = 2k + 3$ et $u_{2k+3} = (k + 1) + 1$
Et la propriété est vérifée au rang $k + 1$.

On conclut que $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{2k} = k$ et $u_{2k+1} = k + 1$.

Exercice 10 :

La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
On pose $\Delta_n = F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2$.

a) Calculer les quelques premières valeurs de Δ_n et en déduire une formule, puis la démontrer par récurrence.
b) Calculer Δ_n à partir de la formule donnée : $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ avec $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Solution :

a) Etudions les premiers rangs :
$n = 0 : F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1$ et $\Delta_0 = -1$
$n = 1 : F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2$ et $\Delta_1 = 1$
$n = 2 : F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3$ et $\Delta_2 = -1$
$n = 3 : F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5$ et $\Delta_3 = 1$

Tâchons de vérifier la proposition correspondant à cette initialisation : $\forall n \in \mathbb{N}\ \Delta_n = (-1)^{n+1}$

Hérédité : considérons la propriété vraie au rang n et étudions le rang $n + 1$
$\Delta_{n+1} = F_{n+1}F_{n+3} - F_{n+2}^2 = F_{n+1}\left(F_{n+2} + F_{n+1}\right) - F_{n+2}\left(F_{n+1} + F_n\right) = F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+2}F_n$
$\Delta_{n+1} = F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = -\Delta_n = (-1)^{n+2}$
La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}\ \Delta_n = (-1)^{n+1}$.

b) On calcule : $\Delta_n = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}} - \left(\dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2$
$= \dfrac{1}{5}\left(\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - \alpha^{n+2}\beta^n - \alpha^n\beta^{n+2} - \alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2} + 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1}\right) = \dfrac{1}{5}\left(2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} - \alpha^{n+2}\beta^n - \alpha^n\beta^{n+2}\right)$

On factorise pour simplifier : $\Delta_n = \dfrac{\alpha^n\beta^n}{5}\left(2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2\right) = -\dfrac{\alpha^n\beta^n}{5}\left(\alpha - \beta\right)^2 = -\left(\alpha\beta\right)^n$ (en substituant α et β par leur valeur dans le carré)
Et finalement : $\Delta_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.