Exercice 330 :

Ecrire sous forme algébrique :

$a = (1+i)^2,\ b = (3-2i)(1-i) - (2+i)^2,\ c = \dfrac{3-2i}{2+5i}$

$d = \dfrac{4+i}{1-i} + \dfrac{2-i}{3-i},\ e = \left(\dfrac{1+i}{i}\right)^3$

Solution :

Comme c'est le premier exercice de manipulation des complexes, on va détailler les étapes concernant les i^2 :

$a = (1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i$

$b = (3-2i)(1-i) - (2+i)^2 = 3 - 3i - 2i + 2i^2 - 4 - i^2 - 4i = -1 + i^2 - 9i = -1 - 1 - 9i = -2 - 9i$

Pour les quotients, le réflexe est de multiplier les 2 membres par l'expression conjuguée du dénominateur pour y faire disparaitre les i (pour rappel, le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. Le concept est repris un peu plus bas dans le document)

$c = \dfrac{3-2i}{2+5i} = \dfrac{(3-2i)\left(2-5i\right)}{\left(2+5i\right)\left(2-5i\right)} = \dfrac{6 - 15i - 4i + 10i^2}{4 - 25i^2} = \dfrac{6 - 10 - 19i}{4+25} = -\dfrac{4+19i}{29}$

$d = \dfrac{4+i}{1-i} + \dfrac{2-i}{3-i} = \dfrac{(4+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{4 + 4i + i + i^2}{1 - i^2} = \dfrac{4 - 1 + 5i}{1+1} = \dfrac{3+5i}{2}$

Nous allons utiliser le premier résultat pour ce dernier.

$e = \left(\dfrac{1+i}{i}\right)^3 = \dfrac{(1+i)(1+i)^2}{i \times i^2} = \dfrac{2i(1+i) \times i}{-i \times i} = \dfrac{2i^2(1+i)}{1} = -2 - 2i$

Exercice 331 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer i^n

Solution :

Regardons les premiers rangs : $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1.$

On comprend qu'il y a un cycle en 4 étapes :
$\forall k \in \mathbb{N},\ i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$

Exercice 332 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2iz + 4 = z - 4i$.

Solution :

Nous allons proposer les 2 façons possibles de traiter cet exercice. Cela permet de les comparer et que chacun puisse voir celle qui lui convient le mieux.

<u>Méthode directe :</u>

$2iz + 4 = z - 4i \Leftrightarrow z - 2iz = 4 + 4i \Leftrightarrow z(1-2i) = 4 + 4i$

On trouve donc que :

$z = \dfrac{4+4i}{1-2i} = \dfrac{(4+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{4 + 8i + 4i + 8i^2}{1 - 4i^2} = \dfrac{4 - 8 + 12i}{1+4} = \dfrac{-4+12i}{5}.$

<u>Écriture algébrique :</u>

Écrivons $z = a + ib,\ \left(a, b\right) \in \mathbb{R}^2$.

L'équation devient $2iz + 4 = z - 4i \Leftrightarrow 2i\left(a + ib\right) + 4 = a + ib - 4i.$

On développe puis regroupe : $2ia + 2i^2b + 4 = a + ib - 4i \Leftrightarrow 4 - 2b - a + 2ia - ib + 4i = 0.$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on arrive au système :

$$\begin{cases} 4-2b-a=0 \\ 2a-b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=4 \\ 2a-b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4-2b \\ 2(4-2b)-b=-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4-2b \\ -5b=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{5} \\ b=\frac{12}{5} \end{cases}.$$

On conclut : $z=\dfrac{1}{5}(-4+12i)$.

<u>Remarque :</u>
On aboutit bien au même résultat (ouf !)
On note que la méthode utilisant le découpage algébrique est plus longue et comporte une étape de développement un peu rébarbative.
Cependant, elle peut être un bonne méthode introductive pour ceux qui auraient du mal à se familiariser avec les nombres complexes en travaillant sur un couple de réels plutôt que directement un nombre complexe.
Pour ceux qui auraient choisi cette méthode en priorité, je vous recommande de reprendre le calcul avec la première méthode ensuite.

Exercice 333 :

Soit $z=\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$. Calculer z^3.

Solution :

$$z^3=\left(\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}\right)^3=\frac{-64}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3}$$

Or $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1+3i^2+2i\sqrt{3}\right)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-2+2i\sqrt{3}\right)$

$=-2+2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+6i^2=-8$

Et finalement : $z^3=\dfrac{-64}{-8}=8$

Exercice 334 :

Déterminer les nombres complexes tels que $z^2=i$.

Solution :

Écrivons $z=a+ib,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$z^2=(a+ib)^2=a^2+i^2b^2+2iab=a^2-b^2+2iab=i$.

A nouveau par identification :

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)(a-b)=0 \\ 2ab=1 \end{cases}$$

Ceci implique $a=b$ ou $a=-b$.

- Cas $a=b$

$2a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ce qui donne comme solutions : $z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

- Cas $a=-b$

$-2a^2 = 1$ et il n'y a pas de solution.

Exercice 335 :

a) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un nombre réel ?
b) Quels sont les nombres complexes dont le carré est un imaginaire pur ?

Solution :

Écrivons $z = a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$.
$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + i^2b^2 + 2iab = a^2 - b^2 + 2iab$.

a) Si le carré est un réel, on a $2iab = 0$, donc $a = 0$ ou $b = 0$.
b) Si le carré est un imaginaire pur, $a^2 - b^2 = 0$, donc $a = \pm b$, mais non nuls (car $0 \in \mathbb{R}$).

Exercice 336 :

Trouver les nombres complexes z non nuls tels que $Z = z + \dfrac{1}{z}$ soit :

a) un nombre réel
b) Un imaginaire pur

Solution :

Écrivons $z = a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$Z = z + \frac{1}{z} = a + ib + \frac{1}{a+ib} = a + ib + \frac{a - ib}{(a+ib)(a-ib)} = a + ib + \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$
$$= \frac{(a^2+b^2)(a+ib) + a - ib}{a^2+b^2} = \frac{a(a^2+b^2+1) + ib(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}.$$

Finalement, on peut écrire : $Z = \dfrac{a(a^2+b^2+1)}{a^2+b^2} + i\dfrac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2}$.

a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{b(a^2+b^2-1)}{a^2+b^2} = 0$

- $b = 0$ et $a \neq 0$ (autrement dit $z \in \mathbb{R}$)
- $a^2 + b^2 = 1$: z est sur le cercle unité.

b) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{a(a^2+b^2+1)}{a^2+b^2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (l'autre membre de la multiplication ne peut évidemment pas être nul)

$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Exercice 337 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z = 1 - \overline{z} + 3i$
b) $\dfrac{z+2i}{\overline{z}+i} = 1$

Solution :

Dans les 2 équations, nous écrivons $z = a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

a) $z = 1 - \overline{z} + 3i \Leftrightarrow a + ib = 1 - (a - ib) + 3i \Leftrightarrow 2a - 1 - 3i = 0$
Or $a \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de solution.

b) Pour que l'expression soit définie, il faut $\overline{z} + i \neq 0 \Leftrightarrow \overline{z} \neq -i \Leftrightarrow z \neq i$
Si $z \neq i$, alors $\dfrac{z + 2i}{\overline{z} + i} = 1 \Leftrightarrow z + 2i = \overline{z} + i$

on peut donc écrire : $a + ib + 2i = a - ib + i \Leftrightarrow 2ib = -i \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{2}$.

Les solutions sont donc $z = a - \dfrac{1}{2}i,\ a \in \mathbb{R}$.

Exercice 338 :

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $iz^2 - 2\overline{z} + z - i = 0$.

Solution :

Écrivons $z = a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$

$iz^2 - 2\overline{z} + z - i = 0 \Leftrightarrow i\left(a + ib\right)^2 - 2\left(a - ib\right) + a + ib - i = 0$
Et $i\left(a + ib\right)^2 - 2\left(a - ib\right) + a + ib - i = 0 \Leftrightarrow i\left(a^2 - b^2 + 2ib\right) - 2a + 2ib + a + ib - i = 0$
$\Leftrightarrow i\left(a^2 - b^2\right) - 2b - a + 3ib - i = 0 \Leftrightarrow -a - 2b + i\left(a^2 - b^2 + 3b - 1\right) = 0$
Par identification, on doit résoudre :

$$\begin{cases} a = -2b \\ a^2 - b^2 + 3b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ 3b^2 + 3b - 1 = 0 \end{cases}$$

Résolvons donc : $3b^2 + 3b - 1 = 0$
$\Delta = 21$ et les solutions sont $b_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{6},\ b_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{6}$.

Les solutions de l'équation sont donc : $z_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{21}}{6}(-2 + i)$ et $z_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{21}}{6}(-2 + i)$

Exercice 339 :

Dans les premières questions, f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$ et
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y),\ f(xy) = f(x)f(y)$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x$
b) Soient x et y 2 nombres réels tels que $y \geqslant x$. En utilisant $\sqrt{y - x}$ montrer que $f(y) - f(x) \geqslant 0$ et donc que f est croissante.
c) Déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

Dans la suite, g est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $g(1) = 1$ et
$\forall (u, v) \in \mathbb{C}^2,\ g(u + v) = g(u) + g(v),\ g(uv) = g(u)g(v)$.

d) Montrer que $g(i) \in \{-i; i\}$
e) On suppose que $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Montrer que g est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison complexe.

Solution :

a) En utilisant $f(1) = 1$ et la 1ère propriété $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$, on prouve que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 0) = f(x) = f(x) + f(0)$ et $f(0) = 0$
Puis par récurrence, que $\forall x \in \mathbb{N},\ f(x) = x$:
L'initialisation a été faite précédemment. Supposons donc qu'au rang $n, f(n) = n$ et étudions le rang $n + 1$.
Le résultat est immédiat : $f(n + 1) = f(n) + f(1) = n + 1$.
Et on conclut que $\forall x \in \mathbb{N},\ f(x) = x$.

On déduit de tout cela le résultat pour $\mathbb{Z}$:
$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n + (-n)) = f(n) + f(-n) = f(0) = 0 = n + f(-n)$
Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ f(-n) = -n$

Occupons-nous maintenant de $\mathbb{Q}$:
$\forall x \in \mathbb{Q},\ x = \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*$.
On peut écrire : $f(qx) = f(p) = p$
Également par la 2ème propriété de f : $f(qx) = f(q) f(x) = qf(x)$
Finalement, on obtient bien : $qf(x) = p$ ou $f(x) = \dfrac{p}{q} = x$.

b) Utilisons le réel proposé.
Propriété additive : $f\left(\left(\sqrt{y-x}\right)^2\right) = f(y - x) = f(y) - f(x)$
Propriété multiplicative : $f\left(\left(\sqrt{y-x}\right)^2\right) = \left(f\left(\sqrt{y-x}\right)\right)^2 \geqslant 0$
On conclut donc que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geqslant x \Rightarrow f(y) - f(x) \geqslant 0$ et f est croissante.

c) Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut écrire :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon \in \mathbb{R},\ \exists (p, q) \in \mathbb{Q}^2,\ p \leqslant q,\ q - p \leqslant \epsilon$ et $p \leqslant x \leqslant q$.
Et par croissance de $f, f(p) \leqslant f(x) \leqslant f(q)$ ou $p \leqslant f(x) \leqslant q$.
En faisant tendre ϵ vers 0, on conclut que $f(x) = x$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$

d) D'après les questions précédentes, on établit que $g(-1) = -1$.
On a donc : $g(i^2) = g(-1) = (g(i))^2 = -1$ et $g(i) \in \{-i; i\}$

e) Comme on suppose $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, on retrouve les propriétés de la question précédente et donc
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.
D'après la question précédente, avec un complexe $z = a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$\forall z \in \mathbb{Z},\ g(z) = g(a + ib) = g(a) + g(i) g(b) = a + g(i) b = a \pm ib$.
Ceci permet de conclure que g est l'identité de $\mathbb{C}$ ou la conjugaison complexe