Exercice 350 :

a) Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer : $\left|z+z'\right|^2+\left|z-z'\right|^2=2\left(\left|z\right|^2+\left|z'\right|^2\right)$.

b) Donner une interprétation géométrique de cette égalité en considérant un parallélogramme, les longueurs de ses côtés et de ses diagonales.

c) Soient $A,\ B,\ C$ trois points non alignés du plan, I le milieu de $\left[BC\right]$. Déduire de la question précédente un expression de AI^2 en fonction de $AB^2,\ BC^2,\ CA^2$.

Solution :

a) Ecrivons $z=a+ib,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $z'=a'+ib',\ (a',b')\in\mathbb{R}^2$.

$\left|z+z'\right|^2+\left|z-z'\right|^2=(a+a')^2+\left(b+b'\right)^2+(a-a')^2+\left(b-b'\right)^2$

$=2\left(a^2+b^2+a'^2+b'^2\right)=2\left(\left|z\right|^2+\left|z'\right|^2\right)$ (on n'insiste pas sur le calcul, les doubles produits s'annulent, ce qui donne le résultat).

Donc $\left|z+z'\right|^2+\left|z-z'\right|^2=2\left(\left|z\right|^2+\left|z'\right|^2\right)$

b) On retrouve une propriété du parallélogramme qu'on rappelle avec des notations habituelle :
$2\left(L^2+l^2\right)=D^2+d^2$.

On considère le parallélogramme constitué de l'origine O du repère et des points d'affixe z, z' et $z+z'$. (On laisse vérifier si besoin que c'est bien un parallélogramme si nécessaire).
Ses diagonales ont alors pour longueur $\left|z+z'\right|$ et $\left|z-z'\right|$ (et ses côtés $\left|z\right|$ et $\left|z'\right|$).

c) Pour retrouver la configuration des questions précédentes, on prend $A=O$, B d'affixe z et C d'affixe z'.
I milieu de $\left[BC\right]$ est donc le milieu des 2 diagonales du parallélogramme qu'on construirait avec un point D d'affixe $z+z'$.
On a donc la propriété s'écrit : $(2AI)^2+BC^2=2\left(AB^2+AC^2\right)$ et donc :
$AI^2=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2\right)-\dfrac{BC^2}{4}$.

Exercice 351 :

Soient z et z' deux nombres complexes, M et M' leurs images dans le plan complexe.
Montrer qu'un point appartient à $\left[MM'\right]$ si et seulement si son affixe est de la forme $\lambda z+(1-\lambda)z'$ avec $\lambda\in\left[0;1\right]$.

Solution :

($\Rightarrow$) Si un point N appartient à $\left[MM'\right]$, en particulier $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MM'}$.
Donc $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MM'}$. $N\in\left[MM'\right]$ impose la condition $\lambda\in\left[0;1\right]$.

Traduisons cette égalité en affixe, en notant z_N celle de N : $z_N-z=\lambda\left(z'-z\right)$.
Ce qui donne finalement comme attendu : $z_N=\lambda z'+(1-\lambda)z,\ \lambda\in\left[0;1\right]$.
(Je laisse comme cela, c'est évidemment équivalent à la forme demandée par symétrie par rapport aux 2 points. Il aurait fallu présenter les égalités par rapport à M' pour arriver directement à la même forme que l'énoncé, mais ce sens me semble plus naturel).

($\Leftarrow$) Étudions la position de N dont l'affixe z_N est $\lambda z+(1-\lambda)z',\ \lambda\in\left[0;1\right]$.
$z_N=\lambda z+(1-\lambda)z'\Leftrightarrow z_N-z'=\lambda\left(z-z'\right)$.
Cela se traduit donc par $\overrightarrow{M'N}=\lambda\overrightarrow{M'M}$. On a bien les 3 points alignés et $\lambda\in\left[0;1\right]$ donne bien $N\in\left[MM'\right]$.

Ceci finalise la preuve de l'équivalence.

Exercice 352 :

Soient $a,\ b,\ c$ trois nombres complexes et $A,\ B,\ C$ leurs images dans le plans. On suppose que $A,\ B,\ C$ ne sont pas alignés. Montrer que les médianes du triangle ABC passent par le point G d'affixe $g = \dfrac{a+b+c}{3}$ (qui est le centre de gravité du triangle).

Solution :

$$g - a = \frac{a+b+c}{3} - a = \frac{b+c-2a}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2} - a\right)$$

En notant I_A le milieu de $[BC]$ on peut réécrire cette égalité : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI_A}$.

Par symétrie des 3 points, on ne réécrit pas les 2 autres égalités vectoriels, mais on retrouve bien que G est le point d'intersection des médianes et qu'il se situe aux $\dfrac{2}{3}$ de celles-ci.

Exercice 353 :

Montrer que l'ensemble des nombres complexes non nuls z tels que $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2$ a pour image l'intersection de 2 cercles que l'on précisera.

<u>Enoncé alternatif :</u> cet exercice est indiqué comme très difficile et effectivement l'intuition qu'il demande pour s'orienter vers la réponse semble difficilement accessible au commun des mortels.
On peut poser la question suivante qui guide la réflexion : montrer que l'ensemble des solutions est la réunion des cercles de centres les points d'affixe i et $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Solution :

On utilisera $z = a + ib,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z\bar{z}}.$$

Or $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} + \dfrac{z}{\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{z} + \dfrac{1}{z\bar{z}} = 4 \Leftrightarrow (z\bar{z})^2 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 4z\bar{z}$

$\Leftrightarrow (z\bar{z})^2 - 4z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0.$

On cherche une expression symétrique en z et $\bar{z}$ qu'on va pouvoir factoriser :

$(z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1)(z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 1)$

$= (z\bar{z})^2 - iz^2\bar{z} + iz\bar{z}^2 - z\bar{z} + iz^2\bar{z} + z^2 - z\bar{z} - iz - iz\bar{z}^2 + z\bar{z} + \bar{z}^2 + i\bar{z} - z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1$

$= (z\bar{z})^2 - 4z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + 1$

Or, on peut factoriser :

$(z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 1)(z\bar{z} - iz + i\bar{z} - 1) = \big((z-i)(\bar{z}+i) - 2\big)\big((z+i)(\bar{z}-i) - 2\big)$

$= \left(|z-i|^2 - 2\right)\left(|z+i|^2 - 2\right)$

Finalement, on trouve : $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| = 2 \Leftrightarrow \left(|z-i|^2 - 2\right)\left(|z+i|^2 - 2\right) = 0.$

L'ensemble des solutions correspond aux 2 cercles de centres les points d'affixe i et $-i$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 354 :

Écrire sous forme algébrique $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Solution :

On utilise la formule d'Euler : $e^{i\theta} = cos\,(\theta) + isin\,(\theta)$

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$e^{i\frac{5\pi}{6}} = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

Exercice 355 :

Utiliser la formule d'Euler pour prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \left|sin\,(nx)\right| \leqslant n \left|sin\,(x)\right|$

Solution :

La formule d'Euler de sinus nous dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \ sin\,(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

Prouvons le résultat par récurrence.

Initialisons avec $n = 2$ (on pourrait initialiser pour $n = 1$, ce qui serait tout à fait valide. Cependant, on en profite pour manipuler les expressions des exponentielles complexes) :

$$sin\,(2x) = \frac{1}{2i}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = 2\left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right] = 2sin\,(x)\,cos\,(x)$$

.

(Remarque : on retrouve l'expression déjà vue par dans les cours de trigonométrie, ouf !)

On a donc : $\left|sin\,(2x)\right| = \left|2sin\,(x)\,cos\,(x)\right| \leqslant 2\left|sin\,(x)\right|$ car $\left|cos\,(x)\right| \leqslant 1$.

Supposons maintenant la propriété vraie à un rang n et étudions le rang $n + 1$:

$$sin\left((n+1)x\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{inx}e^{ix} - e^{-inx}e^{-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}e^{-i(n-k)x}$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k-n)x}$$

En passant au module, puis en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\left|sin\left((n+1)x\right)\right| = \left|\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right|\left|\sum_{k=0}^{n} e^{i(2k-n)x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right|\sum_{k=0}^{n}\left|e^{i(2k-n)x}\right|$$

Or $\left|e^{i(2k-n)x}\right| = 1$, donc $\sum_{k=0}^{n}\left|e^{i(2k-n)x}\right| = n + 1$.

Finalement, on trouve bien $\left|sin\left((n+1)x\right)\right| \leqslant (n+1)\left|\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right| = (n+1)\left|sin\,(x)\right|$.

Et on conclut $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \ \left|sin\,(nx)\right| \leqslant n\left|sin\,(x)\right|$.

(Remarque : On constate qu'on n'a pas du tout utilisé la récurrence, mais uniquement un jeu d'écriture sur les exponentielles ! De plus le cas $n = 2$ est traité différemment du cas général. Je laisse en l'état pour que chacun profite de mes divagations et se rende compte que ça arrive à tout le monde !)

Exercice 356 :

Soit $a \in \mathbb{C}$

a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{U}$, $\forall z \in \mathbb{U}\ \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{U}$

b) Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que si $a \in \mathbb{D}$ alors $\forall z \in \mathbb{D}$, $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{D}$

Solution :

Rappel : pour les 2 questions, on utilise la propriété du module : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall z' \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

a) $\forall z \in \mathbb{U}$, $z - a = z\left(1 - \dfrac{a}{z}\right) = z\left(1 - \dfrac{a\overline{z}}{|z|^2}\right) = z(1 - a\overline{z})$ $(z \neq 0)$

Or $\overline{(1-a\overline{z})} = 1 - \overline{a}z$, donc $|1 - a\overline{z}| = |1 - \overline{a}z|$.

Finalement, $|z-a| = |1 - \overline{a}z|$ ($\neq 0$ par hypothèse sur a et z).

Donc $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = 1$ et $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{U}$

b) On cherche à prouver que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$, qui est la caractéristique de $\mathbb{D}$.

Or $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z-a| < |1-\overline{a}z| \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2$ (les 2 quantités étant des réels positifs).

$|z-a|^2 = (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = z\overline{z} + a\overline{a} - a\overline{z} - \overline{a}z$
$|1-\overline{a}z|^2 = (1-\overline{a}z)(1-a\overline{z}) = 1 - \overline{a}z - a\overline{z} + a\overline{a}z\overline{z}$

Donc : $|z-a|^2 - |1-\overline{a}z|^2 = z\overline{z} + a\overline{a} - a\overline{z} - \overline{a}z - 1 + \overline{a}z + a\overline{z} - a\overline{a}z\overline{z} = z\overline{z} + a\overline{a} - 1 - a\overline{a}z\overline{z}$
$= |z|^2 + |a|^2 - |z|^2|a|^2 - 1 = |z|^2\left(|a|^2 - 1\right) + |a|^2 - 1 = \left(|a|^2 - 1\right)\left(|z|^2 + 1\right)$

Par hypothèse, $|a|^2 < 1$, donc $|z-a|^2 - |1-\overline{a}z|^2 < 0$.

Et on conclut que $\forall z \in \mathbb{D}$, $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \in \mathbb{D}$.

Remarque : La méthode utilisée pour la question b) permet de répondre aux 2 questions !

Exercice 357 :

Quels sont les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\left(sin(\theta) + icos(\theta)\right)^n = sin(n\theta) + icos(n\theta)$?

Solution :

On « reconnaît » une formule inspirée de la formule de Moivre.

En utilisant les formules de trigonométrie, on sait que : $sin\left(\theta\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et $cos\left(\theta\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

On veut donc retrouver : $\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^n = cos\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - n\theta\right)$

Or, d'après la formule de Moivre, on a :
$\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + isin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)^n = cos\left(n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) + isin\left(n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$.

On veut donc : $n\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \equiv \frac{\pi}{2} - n\theta\left[2\pi\right]$ ou $n\frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$
Finalement $n \equiv 1\left[4\right]$.

Exercice 358 :

Soit $a \in \mathbb{C}$. Quelle est l'image de l'ensemble $\left\{a + 2e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$?

Solution :

On sait que l'ensemble $\left\{2e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$ représente un cercle de centre O et rayon 2.
L'ensemble $\left\{a + 2e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$ représente un cercle de centre M point d'affixe a et de rayon 2.

Exercice 359 :

Soit $a \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R}$. Quelle est l'image de l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + re^{i\alpha}$ lorsque r décrit $\mathbb{R}$? $\mathbb{R}_+$? $\left[0; R\right],\ R \in \mathbb{R}_+^*$?

Solution :

α étant fixé, $re^{i\alpha}$ va décrire une droite formant un angle α avec l'axe des abscisses.
En notant M le point d'affixe a, on a donc les 3 ensembles :

- Une droite formant un angle α avec l'axe des abscisses et passant par M.
- Une demi-droite, le « sens » étant donné par la valeur de α.
- Un segment de longueur R dont M est une extrémité.