CAPES INTERNE 2007
ÉNONCÉ

Problème 1

Le but de ce problèmùe est l'étude de quelques spécificités des fonctions numériques c et s de la variable réelle x définies sur $\mathbf{R}$ respectivement par

$$c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I

Majorations, minorations, encadrements

1. Calculer $c(0)$ et $s(0)$; donner une valeur approchée de $c(1)$ et de $s(1)$ à 10^{-2} près.
2. Démontrer que la fonction c est paire et que la fonction s est impaire.
3. 3.1. Justifier que, pour tout réel x, on a
   - ♦ $[c(x)]^2 - [s(x)]^2 = 1$
   - ♦ $c(x) \geqslant 1$.

   3.2. Vérifier que, pour tout réel x positif, on a :

   $$0 \leqslant s(x) < c(x).$$

4. 4.1. Justifier que les fonctions c et s sont dérivables sur $\mathbf{R}$; déterminer les fonctions dérivées correspondantes.

   4.2. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions c et s.

   4.3. Tracer les courbes représentatives des fonctions c et s dans un même repère orthonormal du plan d'unité graphique 1 cm.
5. 5.1. Démontre que, pour tout réel x positif, on a :

   $$x \leqslant s(x).$$

   5.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel x positif :
   - ♦ $1 + \dfrac{x^2}{2} \leqslant c(x)$;

♦ $x + \dfrac{x^3}{6} \leqslant s(x)$.

6. 6.1. Démontrer que, pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

♦ $s(x) \leqslant 2x$;

♦ $c(x) \leqslant 1 + x^2$.

6.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel x compris entre 0 et 1 :

♦ $s(x) \leqslant x + \dfrac{x^3}{3}$;

♦ $c(x) \leqslant 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{12}$.

6.3. Justifier que, pour tout réel x compris entre 0 et 1, on a :

$$0 \leqslant c(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{12}.$$

Qu'en est-il pour $s(x)$?

Partie II

Vers une approximation de la fonction c par des fonctions polynômes

1. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel x, on a :

$$c(x) = 1 + \int_0^x (x-t)c(t)dt.$$

En déduire que, pour tout réel x, on a :

$$c(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}c(t)dt.$$

2. Démontrer que, pour tout réel x, la relation suivante est satisfaite pour tout entier n strictement positif :

$$c(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)dt.$$

Un nombre réel strictement positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que $c(a) = 1 + \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a^{2k}}{(2k)!}$.

3. Démontrer que pour tout entier n strictement positif, on a :

$$\int_0 \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)dt \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}c(a).$$

4. On note $v_n = \dfrac{a^{2n}}{(2n)!}$ où n est un entier strictement positif.
   4.1. Prouver qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :
   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \frac{1}{2}.$$
   4.2. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a :
   $$v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}} v_N.$$
   4.3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.
5. On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :
   - ♦ $u_0 = 1$;
   - ♦ pour tout entier n strictement positif, $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2k}}{(2k)!}$.

   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $c(a)$.

Partie III

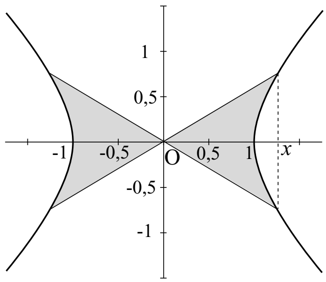
Les fonctions c et s et l'hyperbole

On admettra que si une fonction continue sur l'intervalle $[1; +\infty[$ *est monotone ou strictement monotone sur l'intervalle* $]1; : +\infty[$, *il en est de même sur l'intervalle* $[1; +\infty[$.

Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$.
On note $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des points de $\mathcal{H}$ admettant des coordonnées x et y positives.

1. Justifier que la courbe $\mathcal{H}^+$ représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f qui à tout réel x de l'intervalle $[1; +\infty[$ associe $\sqrt{x^2 - 1}$.
2. Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{H}^+$.
3. Démontrer que la courbe $\mathcal{H}$ peut être obtenue à partir de la courbe $\mathcal{H}^+$ par des symétries que l'on précisera.
4. Tracer la courbe $\mathcal{H}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Un nombre réel positif a étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que les coordonnées du point M *de* $\mathcal{H}^+$ *tel que l'aire grisée représentée ci-dessous soit égale à 2a sont* $(c(a),\ s(a))$.



5. On note :
   - ♦ F la primitive de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et nulle en 1 ;
   - ♦ $\mathcal{A}$ la fonction qui à tout réel x supérieur ou égal à 1 associe l'aire de la partie hachurée représentée ci-dessus et correspondant au point M d'abscisse x de la courbe $\mathcal{H}^+$;
   - ♦ g la fonction numérique de variable réelle x définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} - F(x).$$

5.1. Justifier la relation suivante, pour tout réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\mathcal{A}(x) = 4g(x).$$

5.2. Démontrer que la fonction $\mathcal{A}$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

5.3. Justifier l'inégalité suivante, pour tout réel strictement supérieur à 1 :

$$g'(x) \geqslant \frac{1}{2x}.$$

5.4. Déduire de ce qui précède :
   - ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$;
   - ♦ Quel que soit le réel a positif, il existe un unique réel x_a supérieur ou égal à 1 tel que :

$$\mathcal{A}(x_a) = 2a.$$

6. Soient $\vec{I} = \dfrac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{J} = \dfrac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$.

Pour tout point M du plan de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note (X, Y) ses coordonnées dans le repère $\left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$.

6.1. Prouver que $\left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$ est un repère orthonormal du plan.

6.2. Exprimer x et y en fonction de X et Y.

6.3. En déduire que, dans le repère $\left(O;\vec{I},\vec{J}\right)$, $\mathcal{H}$ est la coiurbe représentative de la fonction $h : X \mapsto \dfrac{1}{2X}$, définie sur $\mathbf{R}^*$.

7. On note A le point de coordonnées $(1\ ,\ 0)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

7.1. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère $\left(O;\vec{I},\vec{J}\right)$?

7.2. Tracer la courbe $\mathcal{H}$, le point A, la droite $(O,\vec{i})$ et représenter la partie grisée précédente dans le repère $\left(O;\vec{I},\vec{J}\right)$

7.3. Calculer l'aire $\mathcal{A}(c(a))$ en fonction de a.

7.4. Conclure.

Problème 2

Notations

Dans tout le problème, on considère A, B, C trois points alignés du plan $\mathcal{E}_2$.
On adopte les notations suivantes :

- Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour centre O et pour rayon R ;
- Le cercle inscrit dans le triangle ABC a pour centre ω et pour rayon r ;
- α, β et γ désignent les longueurs respectives des c ôtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$;
- M_A, M_B et M_C désignent les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$;
- H_A, H_B et H_C désignent les pieds des hauteurs respectives issues de A, B et C ;
- Δ_A, Δ_B et Δ_C désignent les bissectrices intérieures du triangle ABC respectivement issues des sommets A, B, C et A', B', C' désignent les points d'intersection de Δ_A, Δ_B, Δ_C respectivement avec les droites (BC), (AC), (AB).

Pour répondre aux différentes questions, il est vivement conseillé de faire plusieurs schémas qui pourront servir de supports aux divers raisonnements.

Partie I

Caractérisation de l'intérieur d'un triangle

Soit D une droite du plan et A un point n'appartenant pas à la droite D. On note H le pied de la perpendiculaire à la droite D, issue de A, $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de la droite D et on pose $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{HA}}{HA}$.

On appelle demi-plan ouvert délimité par la droite D et contenant le point A [resp. ne contenant pas le point A] l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le repère $(H; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tels que $y > 0$ [resp. $y < 0$].

L'intérieur d'un triangle ABC non aplati est, par définition, l'intersection des trois demi-plans ouverts délimités respectivement par les droites (AB), (BC) et (AC) et contenant respectivement les points C, A et B.

1. Soient B et C deux points distincts appartenant à la droite D.
   Démontrer qu'un point M du plan appartient au demi-plan ouvert délimité par la droite D et contenant le point A si et seulement si l'ordonnée du point M dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ est strictement positive.
2. Démontrer qu'un point M du plan appartient à l'intérieur du triangle ABC si et seulement si M est barycentre des points A, B et C affectés de coefficients non nuls, tous de même signe.

Partie II

Position du centre du cercle inscrit d'un triangle ABC non aplati

1.
   1.1. Démontrer que, dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, une équation de la bissectrice Δ_A est :
   $$y = \frac{\gamma}{\beta}x.$$
   1.2. Déterminer, dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, une équation de la droite (BC).
   1.3. Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, les coordonnées du point A', point d'intersection des droites Δ_A et (BC).
2.
   2.1. Déterminer deux réels λ et μ tels que le point A' soit barycentre des points B et C respectivement affectés des coefficients λ et μ.
   2.2. Démontrer que le point ω, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, est le barycentre des points A, B et C respectivement affectés des coefficients α, β et γ longueurs respectives des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
   2.3. Quel résultat concernant la position du point ω relativement au triangle ABC retrouve-t-on ?

Partie III

Position du centre du cercle circonscrit d'un triangle ABC non aplati

M_A étant le milien du segment $[BC]$, on munit le plan $\mathcal{E}_2$ du repère orthonormal $(M_A; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que le point B (respectivement C) ait pour coordonnées $\left(-\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ (respectivement $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$) et que le point A ait une ordonnée strictement positive.
On note (x_A, y_A) les coordonnées du point A dans ce repère.

1. Justifier que les coordonnées du point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, sont :
$$x_O = 0 \text{ et } y_O = \frac{y_A}{2} + \frac{\left(x_A - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x_A + \frac{\alpha}{2}\right)}{2y_A}.$$
2. Démontrer que :
$$2y_0 y_A = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$$
3. En déduire que, pour que les points O et A soient dans le même demi-plan ouvert déterminé par la droite (BC), il faut et il suffit que l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ soit aigu.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les angles géométriques du triangle ABC pour que le point O soit à l'intérieur du triangle ABC.

Partie IV

Cas particulier d'un résultat établi par Lazare Carnot (général et mathématicien français 1753-1823)

On admettra que :

> *Si M est un point appartenant à l'intérieur d'un triangle ABC non aplati, l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AMB, AMC et BMC.*

1. Justifier que l'aire du triangle ABC notés $\mathcal{A}(ABC)$ est telle que :
$$\mathcal{A}(ABC) = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) r$$
où r désigne le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.
2. On se place dans le cas où le point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC, appartient à l'intérieur du triangle ABC.

   2.1. Démontrer que :
$$\alpha\, OM_A + \beta\, OM_B + \gamma\, OM_C = 2\mathcal{A}(ABC); \qquad (1)$$

   2.2. Justifier que le point H_A (respectivement H_B, H_C) est un point du segment $[BC]$ (respectivement $[AC]$, $[AB]$).

2.3. Démontrer que les triangles ABH_B, ACH_C et BOM_A sont semblables.

2.4. En déduire l'égalité suivante :

$$(\beta+\gamma)\, OM_A = R\, (AH_B + AH_C)$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Ecrire les deux autres égalités qui peuvent être obtenues de manière analogue pour OM_B et OM_C.

2.5. Démontrer alors l'égalité suivante :

$$OM_A + OM_B + OM_C = R + r. \qquad (2)$$

3. Dans cette question, le point O appartient à l'un des segments $[BC]$, $[AB]$ ou $[AC]$.

3.1. Préciser la nature du triangle ABC dans ce cas.

3.2. On suppose que le point O est un point du segment $[BC]$.

3.2.1. Démontrer qu'on a alors :

$$R + r = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad R + r = \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

3.2.2. En déduire que la relation (2) est encore vérifiée dans ce cas.