CAPES Externe 2015 épreuve 1

Problème n°1

Partie A

I.

1. On étend la notation proposée dans l'énoncé en écrivant : $z = Re(z) + iIm(z)$.

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \geqslant \sqrt{(Re(z))^2} = |Re(z)| \geqslant Re(z)$$

Les cas d'égalité imposent : $|Re(z)| = Re(z)$ et $Im(z) = 0$, ce qui correspond à un réel positif.
Donc $|z| = Re(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$

2. Les 2 quantités à comparer sont positives, on a donc comparer leurs carrés pour alléger un peu l'écriture.

Nous allons également utiliser une notation traditionnelle $z = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec les indices correspondants quand nécessaire.

$$\left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2|$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\,(x_1x_2 + y_1y_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,(x_1x_2 + y_1y_2)$$

.

Il faut donc comparer $|z_1|\,|z_2|$ et $x_1x_2 + y_1y_2$.

Or $|z_1|\,|z_2| = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)\,(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2}$

On élève une nouvelle fois au carré. Sans précision sur le signe des $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$, si on prouve l'inégalité sur les carrés, elle sera plus forte que celle recherchée.

$$\left(|z_1|\,|z_2|\right)^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2$$

Et $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2$

On conclut grâce à l'identité remarquable : $(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 - 2x_1x_2y_1y_2 \geqslant 0$.

Finalement on vérifie bien : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

3. ($\Leftarrow$) Ce sens est immédiat, si $z_2 = \lambda z_1,\ \lambda \geqslant 0$, on a :

$|z_1 + z_2| = |(\lambda + 1)\,z_1| = (\lambda + 1)\,|z_1|$
Et $|z_1| + |z_2| = |z_1| + |\lambda z_1| = (\lambda + 1)\,|z_1|$
Donc $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

($\Rightarrow$) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

D'après la question précédente, on a $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$

- Supposons $y_1 \neq 0,\ y_2 \neq 0 : x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$, qu'on définit comme λ.

On a $\left|z_1 + z_2\right| = \left|\lambda + 1\right| \left|z_1\right|$ et $\left|z_1\right| + \left|z_2\right| = \left(\left|\lambda\right| + 1\right) \left|z_1\right|$.
L'hypothèse d'égalité impose $\lambda \geqslant 0$.

- Supposons $y_1 = 0$.

Si $y_2 = 0$, on retrouve l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$ et on va avoir $x_1 = \lambda x_2,\ \lambda \geqslant 0$.

Si $y_2 \neq 0$: On devrait avoir $x_1 = 0$, c'est à dire $z_1 = 0$ ce qui est impossible par hypothèse.

Et on conclut $\forall \left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{C}^2,\ \left|z_1 + z_2\right| = \left|z_1\right| + \left|z_2\right| \Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1,\ \lambda \geqslant 0$.

II. Dans cette partie, nous allons procéder par récurrence en considérant l'initialisation issue de la partie précédente.

1. On suppose donc que jusqu'au rang n, $\forall \left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right|$ et étudions le rang $n+1$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| + \left|z_{n+1}\right| \text{ (utilisation du résultat au rang } 2\text{)}$$

Et $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| + \left|z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right| + \left|z_{n+1}\right|$ (utilisation du rang n)

Donc $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \left|z_k\right|$, ce qui assure l'hérédité de la propriété.

On conclut : $\forall \left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right|$

2. Procédons de la même façon que pour la question précédente avec l'initialisation de la question 3 de la partie précédente et considérons que jusqu'au rang n pour $\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right) \in \mathbb{C}^n,\ \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right| \Leftrightarrow \forall k \in [1;n],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1$ et étudions le rang $n+1$:

On pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$.
Grâce à la partie précédente, on sait que
$\left|Z_n + z_{n+1}\right| = \left|Z_n\right| + \left|z_{n+1}\right| \Leftrightarrow \exists \Lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+,\ z_{n+1} = \Lambda_{n+1} Z_n$

Et par hypothèse de récurrence, $\left|Z_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right| \Leftrightarrow \forall k \in [1;n],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1$

En intégrant cela dans l'égalité précédente, et avec $\lambda_{n+1} = \Lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ on assure l'hérédité de la récurrence.

On conclut bien que $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Leftrightarrow \forall k \in [1; n],\ \exists \lambda_k \in \mathbb{R}_+,\ z_k = \lambda_k z_1$

Géométriquement, le cas d'égalité correspond à tous les points d'affixes z_k sur une demi-droite partant de O et tous les z_k ont le même argument.

Partie B

I. On veut $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|} = 0$.

On peut prendre par exemple pour n pair les sommets d'un polygone régulier centré en O.

II.

1. $\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} (z - z_k) = z \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k} z_k}{|z_k|}$.

Or $\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|}} = 0$ et $\overline{z_k} z_k = |z_k|^2$.

D'où la conclusion $\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} (z - z_k) = - \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

2. <u>Remarque :</u> *l'énoncé comporte une faute de frappe. L'inégalité dans $\mathbb{C}$ n'a, par défaut, pas de sens. Il faut considérer le module des $z - z_k$.*

On a $\left| \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} (z - z_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} |z_k| \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ (la dernière égalité s'obtient car on somme des nombres positifs).

Or, d'après la partie A, $\left| \sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} (z - z_k) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \overline{u_k} (z - z_k) \right| = \sum_{k=1}^{n} |\overline{u_k}|\ |z - z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$ (par définition, les u_k sont de module 1.

Finalement $\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|$.

3. En utilisation la question II.2 de la partie A, on sait que l'égalité entre la somme des normes et la norme d la somme se produit si tous les complexes sont proportionnels entre eux (avec un coefficient positif).

On a donc $\forall k,\ \overline{u_k} (z - z_k) = \lambda_k \overline{u_1} (z - z_1)$.
Ce qui permet de réécrire : $\sum_{k=1}^{n} \overline{u_k} (z - z_k) = \overline{u_1} (z - z_1) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = - \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

Comme $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \left| z_k \right| \geqslant 0$, on a forcément $\overline{u_1}\left(z - z_1\right) \in \mathbb{R}_-$

Et conclut que $\sum_{k=1}^{n} \left| z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| z - z_k \right|$ impose $\forall k,\ \overline{u_k}\left(z - z_k\right) \in \mathbb{R}_-$

4. $(\Leftarrow)$ Si $z = 0$, l'égalité est triviale.

$(\Rightarrow)$ $\sum_{k=1}^{n} \left| z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| z - z_k \right|$, ce qui impose $\forall k,\ \overline{u_k}\left(z - z_k\right) = \lambda_k \overline{u_1}\left(z - z_1\right)$

Ou $z\overline{u_k} - \left| z_k \right| = \lambda_k z \overline{u_1} - \lambda_k \left| z_1 \right|$, qu'on écrit encore $z\left(\overline{u_k} - \lambda_k \overline{u_1}\right) = \left| z_k \right| - \lambda_k \left| z_1 \right|$

On considère $z \neq 0$ et on distingue 2 cas :

- $\forall k, \overline{u_k} = \lambda_k \overline{u_1}$, ce qui est impossible par hypothèse.
- $\forall k \neq 1,\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{u_k} - \lambda_k \overline{u_1}}{\left| z_k \right| - \lambda_k \left| z_1 \right|}$ ce qui est également impossible car il faudrait alors que tous les $\overline{u_k} - \lambda_k \overline{u_1}$ soient positionnés sur une même droite, ce qui implique donc que tous les z_k sont également sur une même droite. A VERIFIER

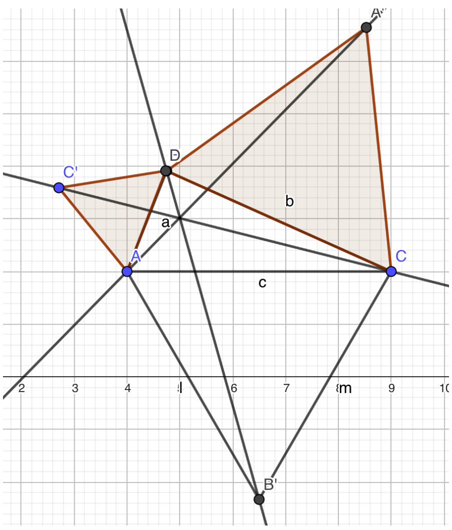
L'hypothèse $z \neq 0$ est donc absurde.

Finalement $\sum_{k=1}^{n} \left| z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| z - z_k \right| \Leftrightarrow z = 0$

5. On déduit de la question précédente que le minimum des $\sum_{k=1}^{n} MA_k$ est atteint pour $M = O$.

Partie C

I. (La figure comporte quelques notations erronées suite à des soucis de manipulation de Géogébra, désolé !)



II. B' est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. On a donc la relation entre les affixes :

$$\frac{b'-a}{c-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

D'où $b'-a = (c-a)\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Finalement $b' = ce^{-i\frac{\pi}{3}} + a\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$

De la même façon, C' est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

On a cette fois : $\dfrac{c'-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, ce qu'on écrit $c'-a = \left(b-a\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc $be^{i\frac{\pi}{3}} = c' - a\left(1-e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ et finalement $b = c'e^{-i\frac{\pi}{3}} + a\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$.

III. $b'-b = ce^{-i\frac{\pi}{3}} + a\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) - c'e^{-i\frac{\pi}{3}} - a\left(1-e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) = (c-c')\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Donc $\dfrac{b'-b}{c-c'} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et on en déduit que son argument est 1 et son module $-\dfrac{\pi}{3}$.

IV. Par symétrie de la construction par rapport aux 3 sommets du triangle, on déduit que tous les angles centrés en Ω entre un sommet du triangle et un des sommets des triangles équilatéraux valent $\dfrac{\pi}{3}$ (le signe dépendant de l'orientation).

Donc, sur notre représentation : $\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$, $\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega A}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega B}\right) = -\dfrac{2\pi}{3}$

V. En considérant les vecteurs normés proposés, le triangle $A''B''C''$ défini par $\overrightarrow{\Omega A''} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega B''} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega C''} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C}$ est équilatéral, d'après les angles calculés précédemment et les distances identiques.

Donc Ω et le barycentre de ce triangle ce qui assure la relation demandée.

On conclut : $\dfrac{\overrightarrow{\Omega A}}{\Omega A} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega B}}{\Omega B} + \dfrac{\overrightarrow{\Omega C}}{\Omega C} = \overrightarrow{0}$.

VI. On retrouve la configuration de la partie précédente (ouf !) et on sait donc que la somme minimale des distances est obtenue à l 'origine du repère qui annule la somme des vecteurs, ici Ω.

Problème n°2

Partie A

I.

1. Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et non majorée.

Par définition d'une suite non majorée, $\forall A > 0,\ \exists p \in \mathbb{N},\ u_p \geqslant A$.

Comme de plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\forall n \geqslant p,\ u_n \geqslant A$, ce qui est bien la définition de la divergence vers $+\infty$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée.

Notons $l = sup\left\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\right\}$.
Par définition de la borne supérieure, $\forall\epsilon > 0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ l-\epsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant l$ (sinon $l-\epsilon$ est un majorant).

Et comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $\forall n \geqslant n_{0,}\ l-\epsilon \leqslant u_n \leqslant l$, ce qui est la définition de la limite.

3. Par symétrie (en considérant $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour formaliser la démonstration ou on la refait complétement en inversant les inégalités !), une suite décroissante est convergente si et seulement si elle est minorée.

II.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. a_n correspond à une approximation par excès de l'air sous la courbe de la fonction inverse.

2. a. $\forall n \geqslant 1,\ a_{2n}-a_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$.

Or pour $n+1 \leqslant k \leqslant 2n,\ \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$, donc $a_{2n}-a_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

b. D'après le critère de Cauchy, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

3. a. $\forall t\in[k;k+1],\ k\leqslant t\leqslant k+1$ et donc (on sait que $k\geqslant 1$) $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

La fonction étant intégrable sur $[k;k+1]$, ce qui donne $\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dt$

Et finalement $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$.

b. En sommant l'inégalité précédente jusqu'à $n-1$, on trouve : $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

Or $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = a_n - 1$,

$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt = \int_1^{n}\frac{1}{t}dt = [ln(t)]_1^n = ln(n)$

Et $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = a_{n-1} \leqslant a_n$

Finalement, on a bien l'inégalité recherchée : $a_n - 1 \leqslant ln(n) \leqslant a_n$

c. En $+\infty$, on a $a_n \sim ln\ (n)$.

4. <u>Remarque :</u> *l'énoncé est manifestement faux, le produit de 2 quantités divergentes vers $+\infty$ ne peut pas converger. Je vais considérer la suite (b_n) qui semble la plus naturelle, mais qui n'est pas définie en $n = 1$.*

On considère la suite $\left(b_n\right)_{n\geqslant 2}$ définie par $b_n = \dfrac{a_n}{ln\ (n)}$.
L'encadrement de la question 3 devient (les étapes sont identiques, car la quantité $ln(n)$ par laquelle on divise ne dépend pas de la variable k) : $\dfrac{a_n - 1}{ln\ (n)} \leqslant 1 \leqslant \dfrac{a_n}{ln\ (n)}$, ou en utilisant b_n :
$b_n - \dfrac{1}{ln\ (n)} \leqslant 1 \leqslant b_n$.

Et on a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$.

Partie B

I.
1. a. Par définition de la convergence de (u_n) vers 0, on peut affirmer que :
$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ -\epsilon \leqslant u_n \leqslant \epsilon$
$$v_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right)$$

Or $-\left(n - n_0 - 1\right)\epsilon \leqslant \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \left(n - n_0 - 1\right)\epsilon$

Et donc $-\epsilon \leqslant -\dfrac{n - n_0 - 1}{n}\epsilon \leqslant \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right) \leqslant \dfrac{n - n_0 - 1}{n}\epsilon \leqslant \epsilon$

Finalement on a bien $\dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) - \epsilon \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) + \epsilon$.

b. Comme n_0 est fixé dans l'inégalité précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right) = 0$.
Cela permet de conclure que $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. Pour généraliser, on va montrer que si (u_n) tend vers l, (v_n) tend vers l.
La démonstration est globalement la même, avec ϵ qui va servir à encadrer $u_n - l$, puis on écrit
$v_n - l = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - l = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(u_k - l\right)\right)$ qui permet de conclure de la même façon que pour la limite en 0.

II.
$x_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n\left(1 + x_n\right)}{1 + 2x_n}$.

1. $x_2 = \dfrac{x_1\left(1+x_1\right)}{1+2x_1} = \dfrac{2}{3}$, donc on a bien $0 < x_2 < 1$.

Comme la propriété est vraie pour $n = 2$, supposons qu'elle est vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:

Considérons la fonction f : $\forall x \in \left]0;1\right[,\ f(x) = \dfrac{x(1+x)}{1+2x}$.

f est bien définie et dérivable sur l'intervalle considérée et
$\forall x \in \left]0;1\right[,\ f'(x) = \dfrac{(1+2x)(1+2x) - 2x(1+x)}{(1+2x)^2}$.

Or sur $\left]0;1\right[$, $1+2x > 2x$ et $1+2x > 1+x$, donc $f'(x) > 0$ et f est croissante.

Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{2}{3}$, on assure que $\forall x \in \left]0;1\right[,\ f(x) \in \left]0;1\right[$.

On a donc bien $x_{n+1} = f\left(x_n\right) \in \left]0;1\right[$, qui nous confirme l'hérédité de la propriété.

Et on conclut que $\forall n \geqslant 2,\ x_n \in \left]0;1\right[$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n\left(1+x_n\right)}{1+2x_n} - x_n = \dfrac{x_n\left(1+x_n\right) - x_n\left(1+2x_n\right)}{1+2x_n} = \dfrac{-x_n^2}{1+2x_n} < 0$

Et la suite $\left(x_n\right)$ est décroissante.

3. $\left(x_n\right)$ est décroissante et minorée donc converge.

Elle converge forcément vers un point fixe de f donc 0.

4. $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1+2x_n}{x_n\left(1+x_n\right)} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1+2x_n-1-x_n}{x_n\left(1+x_n\right)} = \dfrac{1}{1+x_n}$.

5. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{1+x_n}$.

Comme $x_n \to 0,\ u_n \to 1$.

6. Par définition de $\left(v_n\right)$, elle représente une somme téléscopique.

On a : $v_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_{k+1}} - \dfrac{1}{x_k}\right) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x_{n+1}} - 1\right) = \dfrac{1}{n\,x_{n+1}} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1-x_{n+1}}{n\,x_{n+1}}$.

Comme $v_n \to 1$, $n\,x_{n+1} \sim 1 - x_{n+1}$ et $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

III.

1. Reprenons la définition de la convergence de $\left(x_n\right)_{n\geqslant 1}$ vers une limite $l \in \mathbb{R}$:

$\exists l \in \mathbb{R},\ \forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \left|x_n - l\right| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$.

On peut par ailleurs écrire : $\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|x_{n+1} - l - x_n + l\right| \leqslant \left|x_{n+1} - l\right| + \left|x_n - l\right| \leqslant \epsilon$.

On conclut que $\left(x_{n+1} - x_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

2. a. D'après la partie **I.**, la convergence de la suite assure la convergence au sens de Cesaro vers la même limite l.

Or $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{n+1}-x_{n}\right)=\frac{1}{n}\left(x_{n+1}-x_{1}\right)=\frac{x_{n+1}}{n}-\frac{x_{1}}{n}$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{n+1}-x_{n}\right)\to l$ et $\frac{x_{1}}{n}\to 0$, donc $\frac{x_{n+1}}{n}\sim\frac{x_{n+1}}{n+1}\to l.$

Finalement, on conclut que $\left(\frac{x_{n}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers l.

b. Si $l\neq 0$, $\left(x_{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge trivialement, car $x_{n}\sim nl$ *(Remarque : le résultat peut se retrouver par* $\frac{x_{n}}{n}$ *ou* $x_{n+1}-x_{n}$*)*

c. Etudions un exemple avec $\forall n\geqslant 1,\ x_{n}=ln\,(n)$, qui diverge vers $+\infty$.
$x_{n+1}-x_{n}=ln\,(n+1)-ln\,(n)=ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ qui tend pourtant bien vers 0.

Partie C

I.
1. $\left(u_{n}\right)_{n\geqslant 1}$ prend alternativement la valeur 1 et -1, donc la somme de ses termes alternativement 1 et 0.

$\left(v_{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge trivialement vers 0

2. $\left(u_{n}\right)_{n\geqslant 1}$ constitue un contre-exemple de la réciproque de la proposition de la partie précédente : la suite diverge, mais converge au sens de Cesaro.

II.
1. Si $\alpha\equiv 0\,[\pi]$, $\forall n,\ u_{n}=0$ et idem pour v_{n}.

2. $u_{n+2}-u_{n}=sin\left((n+2)\,\alpha\right)-sin\,(n\alpha)=2sin\,(\alpha)\,cos\left((n+1)\,\alpha\right)=2sin\,(\alpha)\,c_{n+1}$

$u_{n+2}+u_{n}=sin\left((n+2)\,\alpha\right)+sin\,(n\alpha)=2sin\left((n+1)\,\alpha\right)cos\,(\alpha)=2cos\,(\alpha)\,u_{n+1}$

3. a. En passant a la limite sur la première relation (assurée par l'hypothèse de convergence de $\left(u_{n}\right)_{n\geqslant 1}$), on tire immédiatement que $\left(c_{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

En sommant les 2 relations, et en nommant l la limite considérée :
$u_{n}=cos\,(\alpha)\,u_{n+1}-sin\,(\alpha)\,c_{n+1}\Rightarrow l=cos\,(\alpha)\,l$ et $l=0$

b. D'après la question précédente, il faudrait qu'à la fois $cos\,(n\alpha)$ et $sin\,(n\alpha)$ tendent vers 0, ce qui est impossible.
L'hypothèse de convergence de $\left(u_{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est donc absurde et $\left(u_{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge.

c. Comme suggéré, passons par la somme $S_{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{ik\alpha}$ qui est une somme géométrique (plutôt la moyenne d'une somme) et dont v_{n} est la partie imaginaire.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha} = \frac{1}{n} \times e^{i\alpha}\frac{1-e^{in\alpha}}{1-e^{i\alpha}}$$

Utilisons l'expression conjuguée du dénominateur (ce qui est légitime car $\alpha \neq 0\,[\pi]$) :
$\left(1 - cos\left(\alpha\right) - isin\left(\alpha\right)\right)\left(1 - cos\left(\alpha\right) + isin\left(\alpha\right)\right) = \left(1 - cos\left(\alpha\right)\right)^2 + \left(sin\left(\alpha\right)\right)^2 = 2\left(1 - cos\left(\alpha\right)\right)$

D'où $S_n = \frac{1}{n} \times \frac{e^{i\alpha}\left(1 - e^{-i\alpha}\right)\left(1 - e^{in\alpha}\right)}{2\left(1 - cos\left(\alpha\right)\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{\left(e^{i\alpha} - 1\right)\left(1 - e^{in\alpha}\right)}{2\left(1 - cos\left(\alpha\right)\right)}$.

Le module des éléments composant la fraction sont bornés, donc S_n converge vers 0.

III.

1. Par croissance de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$, on sait que $\forall k \geqslant n+1,\ u_{n+1} \leqslant u_k$.

En sommant, $\sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$ ou $n u_{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

2. Par définition de $\left(v_n\right)_{n\geqslant 1}$, on obtient directement le résultat demandé (et même sans la faute de frappe),
$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k\right) = 2v_{2n} - v_n$$

3. Comme $\left(v_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge, elle est bornée et donc majorée (ainsi que la suite extraite $\left(v_{2n}\right)_{n\geqslant 1}$).
L'inégalité de la question précédente, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ est également majorée, donc convergente.

Notons v la limite de $\left(v_n\right)_{n\geqslant 1}$ et u celle de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$.

En utilisant une nouvelle fois la question précédente, on trouve : $u \leqslant 2v - v = v$.

Par ailleurs, la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ étant croissante, sur le même principe que la 1ère question, on obtient :
$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n = u_n$.
Et donc $v \leqslant u$.

On conclut donc que $v = u$ et que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ et $\left(v_n\right)_{n\geqslant 1}$ ont la même limite.

4. Par symétrie, on obtient le même résultat pour une suite décroissante.

On peut donc énoncé qu'une suite monotone converge si et seulement si sa moyenne de Cesaro converge et que les 2 ont alors la même limite.