Problème n°1 : VRAI-FAUX

1. Analyse

1. FAUX : f n'est pas paire ssi $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x)$.
2. VRAI : application du Théorème des Valeurs Intermédiaires sur la fonction $g\ :\ x \mapsto f(x) - x$. Par définition de f, $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$.
3. FAUX : contre-exemple avec une fonction trigonométrique sur $\left[0; 2\pi\right]$ (intégrale nulle) et une fonction constante < 1.
4. FAUX : on considère à nouveau une fonction trigonométrique sur $\left[0; 2\pi\right]$.
5. FAUX : l'équation caractéristique de l'équation différentielle est $r^2 - 3r + 2 \ = \ 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 1$. Les solutions sont donc de la forme $x \mapsto \lambda e^{2x} + \mu e^x + 2$.
6. FAUX : il existe une suite non majorée qui ne converge pas. (Cette assertion est fausse d'ailleurs)
7. FAUX : (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{-1}{7}$, elle converge vers $\frac{8}{7}$.
8. FAUX : la variable u n'est pas mise à jour dans la boucle.

2. Géométrie

9. FAUX : la contraposée de $p \Rightarrow q$ est $non\ \ q \Rightarrow non\ \ p$, donc $AB^2 + AC^2 \neq BC^2 \Rightarrow ABC$ n'est pas rectangle en A.
10. VRAI : $\left(x + y \mid x - y\right) = \| x \|^2 - \left(x \mid y\right) + \left(y \mid x\right) - \| y \|^2 = 0$ par commutativité du produit scalaire.
11. FAUX : la propriété nous donne $\left(x - y \mid z\right) = \left(x \mid z\right) - \left(y \mid z\right) = 0$, ce qui implique cependant $(x - y) \perp z$.
12. FAUX : $\overrightarrow{AC} = (9; 3)$ et son milieu est $I(0.5; 2.5)$. Une équation d'une droite orthogonale à $\overrightarrow{AC}$ est donc de la forme $3x + y + c = 0$. On trouve $c = -4$.

13. FAUX : avec $z = x + iy$ et en élevant au carré (qui conserve l'égalité de 2 réels positifs), on a $(x - 2)^2 + y^2 = (x + 1)^2 + y^2$. La solution est en fait la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ ou les points $z = \frac{1}{2} + iy$.
14. VRAI : On a $\| \overrightarrow{OA} \| = \| \overrightarrow{OB} \| = 2$ et donc l'angle entre ces vecteurs et l'axe des abscisses est $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$.
15. FAUX : Un vecteur directeur de D est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un vecteur orthogonal à P est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires.

3. Matrices

16. FAUX : $det(M) = -1$, donc M est inversible. Le polynôme caractéristique de M est $det(XI_n - M) = X^2 + 1$. Comme on travaille sur $M_2(\mathbb{R})$, il n'y a pas de valeur propre et M n'est pas diagonalisable.
17. VRAI : si A et B sont inversibles comme $AB = 0,\ A^{-1}ABB^{-1} = I_n = 0$.

4. Pourcentages

18. FAUX : l'augmentation est de $1{,}12 \times 1{,}16 \times 1{,}07 = 1{,}39$.
19. FAUX : si $a_2 \ll a_1$ et $b_2 \ll b_1$, le pourcentage de réussite d'Armelle sera $\sim 50\,\%$ et celui de Boris $\sim 40\,\%$.

5. Arithmétique

20. VRAI : $n^3 - n = n(n+1)(n-1)$ et au moins un des termes (3 nombres consécutifs) est pair.
21. FAUX : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau intègre.

6. Dénombrement

22. FAUX : le nombre de parties est 2^{10} (et pas 10^2).
23. VRAI : compte-tenu de la disposition décrite, 3 droites quelconques forment forcément un triangle. Évidemment, l'ordre de choix n'a pas d'importance. Le nombre de triangles est donc $\binom{n}{3} = \dfrac{n!}{(n-3)!3!} = \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)}{6}$.

7. Probabilités

24. FAUX : $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X = 1 \ ou \ X = 2)$. $P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$ et $P(X = 2) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{6}$.
25. VRAI : A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont et donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ également. La réciproque se prouve par symétrie.

Problème n°2 : équations fonctionnels

1. Quelques résultats classiques

1. Dérivabilité

a. f est dérivable en a si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand $x \to a$ (qu'on note usuellement $f'(a)$).

b. Par définition de $f'(a)$ et en utilisant la fonction proposée ϵ, on peut écrire
$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0.$$
En repartant de la définition de ϵ, on peut écrire $(x-a)\epsilon(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$.
En posant $g : x \mapsto (a-x)\epsilon(x)$, on obtient l'écrire $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + g(x)$ et d'après la limite ci-dessus, g est bien négligeable devant $x \mapsto (x-a)$ en a.

c. (i) f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ et donc
$\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = \lim\limits_{x \to a} (x-a)f'(a) = 0$. Donc f est continue.
(ii) Le contre-exemple classique est la fonction valeur absolue « étudiée en 0.

d. Considérons le taux d'accroissement :

$$\frac{fg(x)-fg(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)+f(x)g(a)-f(x)g(a)}{x-a} = \frac{f(x)(g(x)-g(a))+g(a)(f(x)-f(a))}{x-a}$$
.

Comme les 2 fonctions sont dérivables en a, on peut écrire
$\lim_{x\to a} \frac{fg(x)-fg(a)}{x-a} = (fg)'(a) = f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$.

e. Considérons comme à la question précédente le taux d'accroissement :
$\frac{f\circ g(x)-f\circ g(a)}{x-a} = \frac{(f\circ g(x)-f\circ g(a))(g(x)-g(a))}{(g(x)-g(a))(x-a)}$.

Par continuité de g, $g(x)\to g(a)$ quand $x\to a$, on trouve :
$\lim_{x\to a} \frac{f\circ g(x)-f\circ g(a)}{x-a} = (f\circ g)'(a) = g'(a)\times f'(g(a))$
On légitime l'opération en considérant un intervalle autour de a sur lequel g ne s'annule pas. Si cet intervalle n'existe pas, g est constante autour de a donc $f\circ g$ également et sa dérivée sera nulle (la formule explicitée reste donc valable).

2. Fonction logarithme népérien

a. Etudions la fonction φ proposée. Elle est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables ln et yx.
$\varphi'(x) = y\frac{1}{yx} - \frac{1}{x} = 0$: φ est donc constante sur son domaine de définition.
En particulier $\varphi(1) = ln(y) - ln(1) - ln(y) = 0$. D'où le résultat.

b. Les résultats sont immédiats par application du résultat précédent.

c. (i) $\forall y\in\mathbb{R},\ g(y) = g(1\times y) = g(1)+g(y)$, donc $g(1)=0$.
(ii) En fixant y:
Par composition : $g'(xy) = yg'(xy)$
Et en partant de la propriété de la fonction $g'(xy) = g'(x)$
On trouve donc bien : $g'(xy) = \frac{g'(x)}{y}$.
(iii) A partir de l'égalité précédente : $g'(1) = yg'(y)$ et donc : $g'(y) = \frac{g'(1)}{y}$.
(iv) Les fonctions sont donc de la forme : $x\mapsto kln(x),\ k\in\mathbb{R}^*$.

d. Par définition de la fonction ln, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ et la fonction est strictement croissante.

e. Comme $ln2>0$, si $A<0$, on prend $n=1$, sinon, $n = \left\lfloor \frac{A}{ln2} \right\rfloor + 1$.
Le résultat est alors immédiat par croissance de ln : $x\geqslant 2^n \Rightarrow ln(x)\geqslant nln(2) = A$.

f. On déduit de la propriété précédent que $\lim_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$.
La propriété démontrée pour les inverses à la question b. nous donne : $\lim_{x\to 0_+} ln(x) = -\infty$.

g. ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et est donc une bijection entre ces ensembles.

h. $(\Rightarrow)\ ln(\frac{a+b}{4})^2 = 2ln(\frac{a+b}{4}) = ln\left(\frac{a^2+b^2+2ab}{16}\right) = lna+lnb = ln(ab)$

Comme ln est bijective, l'égalité précédente implique que $\dfrac{a^2+b^2+2ab}{16} = ab$ et donc $a^2+b^2 = 14ab$.

($\Leftarrow$) Trivial, en « remontant » les égalités ci-dessus.

2. Première équation fonctionnelle de Cauchy

3. Résultat préliminaires

a. D'après la propriété additive de f, on a $f(y) = f(0+y) = f(0) + f(y)$ et $f(0) = 0$.

b. $f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$

c. Immédiat par la définition : $f(nx) = nf(x)$.

d. En écrivant $r = \dfrac{p}{q}$, on obtient $f(qrx) = pqf(x) = qf(rx)$ et en divisant par q, $f(rx) = rf(x)$.

e. En reprenant la question précédente, $f(r) = rf(1)$.

4. Première méthode

On considère une suite $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite de rationnels avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
On peut écrire $f(u_n - x) = f(u_n) - f(x) = u_n f(1) - f(x)$.

Comme f est continue, on peut passer à la limite on obtient : $f(x) = xf(1)$.
L'ensemble des fonctions continues et additives est donc l'ensemble des fonctions linéaires.

5. Seconde méthode

a. f est continue sur $\mathbb{R}$, on peut donc l'intégrer sur tout segment $[x; x+1]$.

$$\int_0^1 f(x+t)dt - \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x) + f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt = f(x) + \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt = f(x)$$

b. De la même façon :

$$\int_x^{x+1} f(x+t)dt - \int_0^1 f(t)dt = \int_x^{x+1} f(x) + f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt = f(x) + \int_x^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt$$

$$= f(x) + \int_0^1 f(x+t)dt - \int_0^1 f(t)dt = 2f(x)$$

c. A partir de a., on étudie le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{x-a}\left(\int_0^1 f(x+t)dt - \int_0^1 f(a+t)dt\right) = \int_0^1 \frac{f(x+t)-f(a+t)}{x-a}dt = \left[f(a+t)\right]_0^1 = f(a+1) - f(a) = f(1)$$

d. Les fonctions sont des fonctions linéaires.

3. Restriction des hypothèses

6. Continuité en un point

a. La continuité en x_0 signifie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \left|x_0 - x\right| < \eta, \ \left|f(x_0) - f(x)\right| = \left|f(x_0 - x) - f(0)\right| < \epsilon.$$

On justifie donc la continuité en 0.

b. On reprend l'égalité précédente pour « remonter » de 0 à x_0 quelconque.

c. La continuité en un point quelconque implique la continuité sur tout $\mathbb{R}$.

7. Monotonie

a. On exhibe les suites des arrondis par excès et par défaut de x_0 qui correspondent aux 3 critères demandés.

b. On repart de la question 3.d. pour écrire (si f est croissante, sinon on inverse les inégalités, ce qui ne change pas le raisonnement): $f(a_n) = a_n f(1) \leqslant f(x_0) \leqslant f(b_n) = b_n f(1)$.
Puis passage à la limite.

c. On retrouve les fonctions linéaires.

8. Encadrement

a. Dans $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists r_n \in \mathbb{Z}\ nx - \alpha \leqslant r_n \leqslant nx - \beta$. Un tel r_n convient.

b. On peut écrire : $n\left|f(x) - ax\right| - |a|\ \left|nx - r_n\right| = n\left|f(x) - ax\right| - |a|\ \left|r_n - nx\right|$
Et : $n\left|f(x) - ax\right| - |a|\ \left|r_n - nx\right| \leqslant \left|nf(x) - nax + nax - ar_n\right| = \left|f(nx - r_n)\right|$.
D'où la conclusion.

c. En considérant $[\alpha;\beta]$ un petit intervalle autour de 0, l'inégalité précédente nous permet de rendre aussi petit que l'on veut $\left|f(x) - ax\right|$ et on retrouve une nouvelle fois une fonction linéaire.

4. D'autres équations fonctionnelles

9. Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy

a. Par définition, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0) \times f(x)$. La conclusion est immédiate.

b. (i) En complément de la question précédente, on note que si la fonction n'est pas nulle, elle ne s'annule jamais.
On a d'une part : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{x}) > 0$.
D'autre part $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x - x) = f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(-x) > 0$

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x + y) = ln\left(f(x + y)\right) = ln(f(x) \times f(y)) = ln(f(x)) + ln(f(y)) = g(x) + g(y)$

(iii) D'après la partie précédente, $g(x) = ax$ et donc $f(x) = exp(ax)$.

10. Equation fonctionnelle de Jensen

a. On peut exprimer la propriété étudiée par : l'image de la moyenne est la moyenne des images.

b. On peut écrire : $2f(\dfrac{x + y}{2}) = f(x) + f(y)$ et $f(\dfrac{x + y}{2}) = \dfrac{f(x + y) + f(0)}{2}$
On peut donc écrire : $f(x + y) = f(x) + f(y) - f(0)$.

c. $g(x + y) = f(x + y) - b = f(x) + f(y) - b\ - b = g(x) + g(y)$.
g est donc solution de l'équation de Cauchy.

11.

a. (i) $g(4) = 4$

On a : $g'(x) = \dfrac{2x \times 2x - 2(x^2+16)}{4x^2} = \dfrac{x^2-16}{2x^2}$, donc $g'(x) \geqslant 0$ sur $\left]-\infty; -4\right] \cup \left[4; +\infty\right[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) \geqslant 4$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ h'(x) = g'(x) - 1 = -\dfrac{x^2+16}{x^2} < 0$ et $h(4) = 0$.

b. (i) avec $x \in \left[4; +\infty\right[$, on a $f(u_n) \geqslant 4$ et $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente. Sa limite est un point fixe de f, donc 4.

(ii) De la même façon, (u_n) est croissante et majorée, donc converge vers 4.

c. La fonction répondant au critère est la fonction fixe égale à 4.