Problème n°1

$\forall x \in \mathbb{R},\ c(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $s(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Partie I

1. $c(0) = 1,\ s(0) = 0.$
$c(1) = 1{,}54,\ s(1) = 1{,}18$

2. $\forall x \in \mathbb{R},\ c(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = c(x)$ et c est paire.
$\forall x \in \mathbb{R},\ s(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\,s(x)$ et s est impaire.

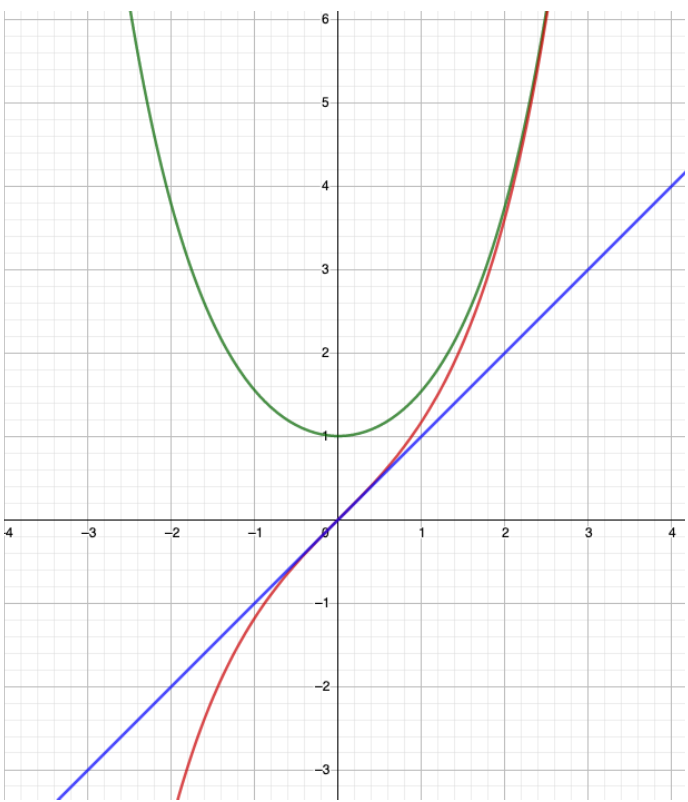
3. 3.1 -
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left[c(x)\right]^2 - \left[s(x)\right]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2\right) = 1$$
On déduit donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \left[c(x)\right]^2 = 1 + \left[s(x)\right]^2 \geqslant 1.$

3.2 - $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x \geqslant e^{-x}$ et $s(x) \geqslant 0$
De plus $c(x) - s(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0.$
Finalement on a bien l'encadrement $0 \leqslant s(x) < c(x)$.

4. 4.1 - c et s sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme et différence de fonctions dérivables.
On trouve immédiatement :
$\forall x \in \mathbb{R},\ c'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = s(x)$
Et $\forall x \in \mathbb{R},\ s'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = c(x)$

4.2 - On déduit que s est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'après les questions précédentes, c est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$

4.3 -



©antoine.remond.maths@gmail.com

5. 5.1 - On va étudier la fonction $f\,:\,x\mapsto s(x)-x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f'(x)=c(x)-1\geqslant 0$ donc f y est croissante avec $f(0)=0$.
Finalement on a bien $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ x\leqslant s(x)$

5.2 Procédons de la même façon avec $g\,:\,x\mapsto c(x)-\dfrac{x^2}{2}-1$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ g'(x)=f(x)\geqslant 0$ donc f y est croissante avec $g(0)=0$.
Finalement on a bien $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \dfrac{x^2}{2}-1\leqslant c(x)$

La dernière inégalité s'obtient encore avec la même méthode appliquée sur la fonction
$h\,:\,x\mapsto s(x)-\dfrac{x^3}{6}-x$, dont la fonction dérivée est g.
On déduit $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \dfrac{x^3}{6}-x\leqslant s(x)$

6. 6.1 - On va étudier la fonction $f\,:\,x\mapsto s(x)-2x$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\in\big[0;1\big],\ f'(x)=c(x)-2\leqslant 0$ donc f y est décroissante avec $f(0)=0$.
Finalement on a bien $\forall x\in\big[0;1\big],\ s(x)\leqslant 2x$
De la même façon, $\forall x\in\big[0;1\big],\ c(x)\leqslant 1+x^2$

6.2 - A nouveau, les inégalités s'enchaînent logiquement et on trouve directement :
$\forall x\in\big[0;1\big],\ s(x)\leqslant x+\dfrac{x^3}{3}$
Et $\forall x\in\big[0;1\big],\ c(x)\leqslant 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{12}$

6.3 - D'après les questions précédentes, on a l'encadrement $\forall x\in\big[0;1\big],\ 0\leqslant c(x)-\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\leqslant\dfrac{x^4}{12}$

D'où on déduit (par croissance de $x\mapsto\dfrac{x^4}{12}$) $\forall x\in\big[0;1\big],\ 0\leqslant c(x)-\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\leqslant\dfrac{1}{12}$.

Pour s, on obtient l'encadrement $\forall x\in\big[0;1\big],\ 0\leqslant s(x)-\left(x+\dfrac{x^3}{6}\right)\leqslant\dfrac{x^3}{6}$ et ainsi

$\forall x\in\big[0;1\big],\ 0\leqslant s(x)-\left(x+\dfrac{x^3}{6}\right)\leqslant\dfrac{1}{6}$.

Partie II

1. Procédons comme indiquer par intégration par parties :

$$1+\int_0^x (x-t)\,c\,(t)\,dt\;=1+\big[(x-t)s(t)\big]_0^x-\int_0^x -s(t)dt\;=1+0+\big[c(t)\big]_0^x=1+c(x)-1=c(x)$$

Pour prouver la nouvelle égalité demandée, nous allons procéder à nouveau par intégration par parties :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}c\,(t)\,dt\;=\left[\frac{(x-t)^3}{3!}s(t)\right]_0^x-\int_0^x -\frac{(x-t)^2}{2}s(t)dt\;=\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}s(t)dt$$

$$= \left[\frac{(x-t)^2}{2}c(t)\right]_0^x + \int_0^x (x-t)\,c(t)dt = -\frac{x^2}{2} + c(x) - 1.$$

D'où le résultat demandé : $c(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}c\,(t)\,dt$

2. Nous allons procéder par récurrence en remarquant que la question précédente correspond au résultat cherché pour $n = 1$.

Considérons donc que le résultat est vrai jusqu'au rang n et étudions $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c\,(t)\,dt$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c\,(t)\,dt = \left[\frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}s(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s\,(t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s\,(t)\,dt$$

$$= \left[\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}c\,(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c\,(t)\,dt = -\frac{x^{2(n+1)}}{\big(2\,(n+1)\big)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c\,(t)\,dt$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence pour écrire :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c\,(t)\,dt = -\frac{x^{2(n+1)}}{\big(2\,(n+1)\big)!} + c(x) - 1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{\big(2k\big)!} = c(x) - 1 - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^{2k}}{\big(2k\big)!}$$

Et finalement on vérifie bien le résultat au rang $n+1$: $c(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{x^{2k}}{\big(2k\big)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!}c\,(t)\,dt.$

Ce qui achève la démonstration.

Et $\forall n \in \mathbb{N}^*, c(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k}}{\big(2k\big)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c\,(t)\,dt.$

3. Reprenons une intégration par parties pour majorer l'intégrale à étudier :

$$\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)dt = \left[\frac{(a-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}c(t)\right]_0^a + \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)dt = \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} + \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)dt$$

.

Sur $\big[0;a\big]$, on majore $\dfrac{(a-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \leqslant \dfrac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$ et donc

$$\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}s(t)dt \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^a s\,(t)\,dt = \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}\big(c(a) - c(0)\big)$$

Et finalement on arrive bien sur la majoration demandée : $\displaystyle\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}c(t)dt \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}c\,(a)$

4. 4.1 - $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \dfrac{(2n)!}{a^{2n}} = \dfrac{a}{2n+1}$

Si $a \leqslant \dfrac{3}{2}$, l'inégalité est vérifiée dès $n = 1$.

Sinon, on choisit le plus petit entier $N \geqslant \dfrac{2a-1}{2}$ ou $N = \left\lfloor \dfrac{2a-1}{2} \right\rfloor + 1$.

4.2 - De l'inégalité précédente, on déduit immédiatement $\dfrac{v_n}{v_N} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-N}}$ et donc le résultat demandé $v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-N}} v_N$.

4.3 - Ce résultat nous permet d'affirmer que la suite converge et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

5. Repartons du résultat de la question 2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*, c(a) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2k}}{(2k)!} + \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)\, dt$.

De là, $\left| u_n - c(a) \right| = \displaystyle\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t)\, dt \leqslant \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} c(a)$ (d'après la question 3)

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| u_n - c(a) \right| = 0$ (suivant le résultat de la question 4).

Partie III

1. D'après l'équation donnée pour $\mathscr{H}$, $x^2 - y^2 = 1$.

Si $x \in [1; +\infty[$, on a $y^2 = x^2 - 1$ et si on considère $y \geqslant 0$, on peut écrire $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

2. $f(x) - x = \sqrt{x^2 - 1} - x = x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} - x$.

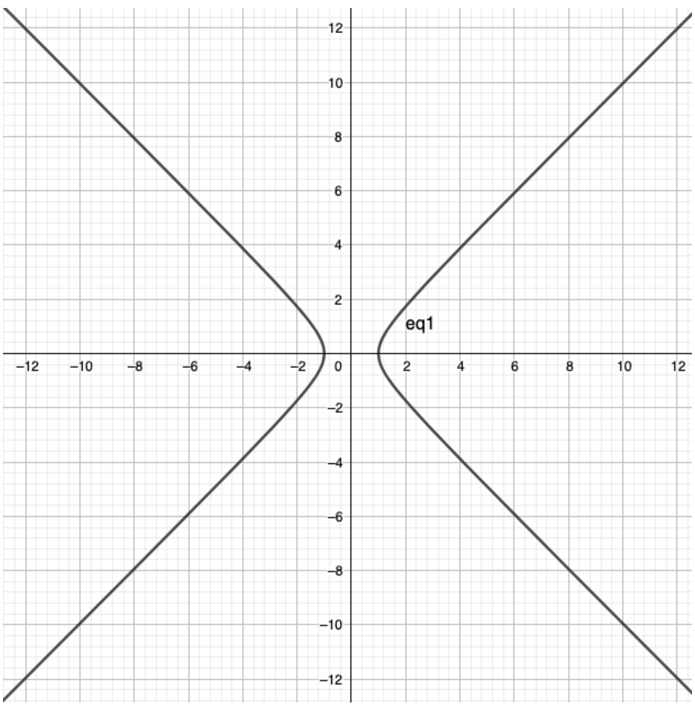
Or, quand $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ et on peut utiliser le développement limité $\sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}} = 1 - \dfrac{1}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et ainsi $f(x) - x = \sqrt{x^2 - 1} - x = -\dfrac{1}{2x} + o(\dfrac{1}{x})$

D'où l'asymptote.

3. En transformant x en $-x$, l'équation n'est pas changée et on a une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Idem en transformant y en $-y$ et l'axe des abscisses est également axe de symétrie.

4. Représentation graphique :



5. 5.1 - On découpe l'air grisée en 4 « triangles » identiques.

L'air du triangle entier est $\dfrac{xf(x)}{2} = \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}$ à laquelle il faut soustraire l'aire sous la courbe entre les points d'abscisses x et 1, qui vaut par définition $F(x)$.
Finalement, $\mathscr{A}(x) = 4g(x)$.

5.2 - g est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme produit, composée et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\forall x \in]1;+\infty[,\ g'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} + \dfrac{2x^2}{4\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}} > 0$

g est donc strictement croissante.

5.3 - $\forall x > 1,\ \sqrt{x^2-1} \leqslant x$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \geqslant \dfrac{1}{x}$, d'où le résultat.

5.4 - (i) Comme les 2 fonctions considérées sont positives, on peut écrire :
$g(x) = \displaystyle\int_1^x g'(t)dt \geqslant \int_1^x \frac{1}{2t}dt = \frac{1}{2}ln(x)$, dont on déduit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

(ii) De ce qui précède, on a que $\mathscr{A}$ est une bijection de $[1;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$ et donc que tout réel positif noté $2a$ a un unique antécédent noté x_a.
On peut bien écrire : $\forall a > 0,\ \exists!\ x_a \geqslant 1\ \mathscr{A}(x_a) = 2a$

6. 6.1 - Comme $\vec{i} \perp \vec{j}$, on a :
$\left\| \vec{I} \right\|^2 = \dfrac{1}{2} \| \vec{i} - \vec{j} \|^2 = 1$ et $\left\| \vec{J} \right\|^2 = \dfrac{1}{2} \| \vec{i} + \vec{j} \|^2 = 1$.
De plus $\vec{I}\,.\,\vec{J} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} - \vec{j}\right).\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+0-0-1) = 0$
Et donc $\left(O;\vec{I};\vec{J}\right)$ est bien orthonormal.

6.2 - On a $X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$
Donc $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y)$

6.3 - $x^2 - y^2 = (x+y)\left(x-y\right) = \dfrac{1}{2}(X+Y+Y-X)(X+Y-Y+X) = 2XY = 1$.
Donc dans ce repère la fonction dont la courbe est $\mathscr{H}$ est $h : X \mapsto \dfrac{1}{2X}$.

7. Dans $\left(O;\vec{I};\vec{J}\right)$, les coordonnées de A sont $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

7.3 - Les points de la courbe ont pour coordonnées $c(a); s(a)$.
L'aire correspondant à $g(x)$ vaut donc $\dfrac{a}{2}$
Et finalement, $\mathscr{A}(x) = 2a$

Problème n°2

Partie I

1. Propriété obtenue par définition du demi-plan ouvert contenant A :

On peut écrire : $\frac{y}{HA}\overrightarrow{HA} = \frac{y}{HA}\overrightarrow{HB} + \frac{y}{HA}\overrightarrow{BA}$ avec $\overrightarrow{HB}$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. D'où le résultat.

2. ($\Rightarrow$) Soit M un point intérieur à ABC. (On considère que M ne fait partie d'aucun côté).

On note D l'intersection de (AM) avec $[BC]$.

Avec $D \in [BC]$ et $M \in [AD]$, on peut écrire :

$m_b\overrightarrow{DB} + m_c\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$

Et $m_a\overrightarrow{MA} + m_d\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$

avec (m_b, m_c) de même signe, ainsi que (m_a, m_d). On va donc considérer qu'ils sont tous les 4 du même signe.

Or $m_b\overrightarrow{DB} + m_c\overrightarrow{DC} = m_b\overrightarrow{DM} + m_b\overrightarrow{MB} + m_c\overrightarrow{DM} + m_c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

Et $\overrightarrow{DM} = \frac{m_a}{m_d}\overrightarrow{MA}$

Finalement, $(m_b + m_c)\frac{m_a}{m_d}\overrightarrow{MA} + m_b\overrightarrow{MB} + m_c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$, d'où le résultat.

($\Leftarrow$) M est le barycentre de ABC avec des coefficients de même signe (nous les considérons tous positifs sans altérer le raisonnement).

On peut écrire : $m_a\overrightarrow{MA} + m_b\overrightarrow{MB} + m_c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

Or $m_a\overrightarrow{MA} + m_b\overrightarrow{MB} + m_c\overrightarrow{MC} = \left(m_a + m_b + m_c\right)\overrightarrow{MB} + m_a\overrightarrow{BA} + m_c\overrightarrow{BC}$

On a alors : $\overrightarrow{BM} = \frac{m_a}{\left(m_a + m_b + m_c\right)}\overrightarrow{BA} + \frac{m_c}{\left(m_a + m_b + m_c\right)}\overrightarrow{BC}$.

D'après la question précédente, M est dans le demi-plan contenant A par rapport à (BC).

Par symétrie de la propriété par rapport aux 3 sommets, on arrive au résultat demandé.

Partie II

1. 1.1 - Les points $M(x; y)$ de la bissectrice Δ_A sont à égale distance de (AB) et (AC).

En particulier, si $x = 1$, $y = \frac{\gamma}{\beta}$ d'où le résultat $y = \frac{\gamma}{\beta}x$

1.2 - Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$, la droite (BC) passe par les points $B\ (1; 0)$ et $C\ (0; 1)$ et son équation est : $y = -x + 1$.

1.3 - Pour trouver les coordonnées de A', on utilise les équations des 2 droites et donc : $\frac{\gamma}{\beta}x = -x + 1$.

Donc : $x_{A'} = \frac{\beta}{\gamma + \beta}$ et $y_{A'} = \frac{\gamma}{\gamma + \beta}$

2. 2.1 - La réponse précédente signifie : $\overrightarrow{AA'} = \frac{\beta}{\gamma + \beta}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\gamma + \beta}\overrightarrow{AC}$

Par propriété du barycentre, on peut poser $\lambda = \beta$ et $\mu = \gamma$

2.2 - Le barycentre des points (A, α) (B, β) (C, γ) est également le barycentre des points (A, α) $(A', \beta + \gamma)$ et donc appartient à Δ_A.
Par symétrie des propriétés utilisées précédemment et dans la question 2.1, on trouve que le barycentre recherché est ω.

2.3 - On retrouve que ω est à l'intérieur du triangle d'après la 1ère partie.

Partie III

1. Le cercle circonscrit est l'intersection des médiatrices des 3 côtés.

Par construction du repère, $x_O = 0$.

Pour calculer y_O, nous utilisons la propriété du centre du cercle : $OA = OB$ ou $OA^2 = OB^2$ (les distances étant positives).

Ceci s'écrit dans le repère orthonormal considéré : $\left(x_A\right)^2 + \left(y_A - y_O\right)^2 = \left(\frac{-\alpha}{2}\right)^2 + \left(y_O\right)^2$

D'où $\left(x_A\right)^2 + \left(y_A\right)^2 + \left(y_O\right)^2 - 2y_Ay_O = \frac{\alpha^2}{4} + \left(y_O\right)^2$.

Et finalement : $y_O = \frac{y_A}{2} + \frac{\left(x_A\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4}}{2y_A} = \frac{y_A}{2} + \frac{\left(x_A - \frac{\alpha}{2}\right)\left(x_A + \frac{\alpha}{2}\right)}{2y_A}$

2. Ecrivons : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{\alpha}{2} - x_A\right)\left(\frac{\alpha}{2} - x_A\right) + \left(y_A\right)^2$

D'après la question précédente, on obtient immédiatement le résultat chercher : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 2y_Oy_A$

3. D'après la partie I, pour que O et A soient dans le même demi-plan, il faut que y_O et y_A soient de même signe. Suivant le résultat ci-dessus, il faut $cos\left(\widehat{BAC}\right) > 0$ autrement dit, $\widehat{BAC}$ aigu.

4. Il faut 3 angles aigus. (La réponse précédente donne l'équivalence directement)

Partie IV

1. Partant du découpage proposé, on sait que la hauteur de chacun de ces triangles vaut r. Les bases étant les côtés, on trouve bien la formule : $\mathscr{A}(ABC) = \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) r$.

2. 2.1 - On a $OM_A = OM_B = OM_C = r$. La formule est immédiate : $2\mathscr{A}(ABC) = \alpha OM_A + \beta OM_B + \gamma OM_C$.

2.2 - Par construction $x_{H_A} = x_A$ et par la question 3 de la partie précédente, les 3 angles sont aigus et $H_A \in [BC]$

2.3 - Par construction, ABH_B et ACH_C ont un angle droit et partage l'angle $\widehat{BAC}$, ils sont donc semblables.

ABH_B et BOM_A ont un angle droit.

De plus, en tant qu'angles interceptant le même arc, on a : $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$, mais OBC étant isocèle, $\widehat{BOC} = 2\widehat{BOM_A}$, d'où le résultat.

2.4 - Les triangles étant semblables, on peut écrire : $\dfrac{OM_A}{AH_B} = \dfrac{R}{\gamma}$ et $\dfrac{R}{\beta} = \dfrac{OM_A}{AH_C}$.
On obtient donc directement $\left(\beta + \gamma\right) OM_A = R\left(AH_B + AH_C\right)$.

Symétriquement, on va obtenir :
$\left(\alpha + \gamma\right) OM_B = R\left(BH_A + BH_C\right)$
$\left(\beta + \alpha\right) OM_C = R\left(CH_B + CH_A\right)$

2.5 - En additionnant les différentes équations on peut écrire :
$\left(\beta + \gamma\right) OM_A + \left(\beta + \alpha\right) OM_C + \left(\alpha + \gamma\right) OM_B = R\left(\alpha + \beta + \gamma\right)$
D'où $\left(\alpha + \beta + \gamma\right)\left(OM_A + OM_B + OM_C\right) = R\left(\alpha + \beta + \gamma\right) + \alpha OM_A + \beta OM_B + \gamma OM_C$.

En reprenant la question 1, on obtient :
$\left(\alpha + \beta + \gamma\right)\left(OM_A + OM_B + OM_C\right) = R\left(\alpha + \beta + \gamma\right) + r\left(\alpha + \beta + \gamma\right)$
Et on déduit le résultat demandé : $OM_A + OM_B + OM_C = R + r$

3. 3.1 - Si O appartient à un côté du triangle, le triangle est rectangle.

3.2.1 - $R = \dfrac{\alpha}{2}$
Et $\mathscr{A}(ABC) = \left(\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) r = \dfrac{\beta\gamma}{2}$ et ainsi $r = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$
Finalement : $R + r = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}$.

De plus, dans un triangle rectangle, $r = \dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$ et $R = \dfrac{\alpha}{2}$

On conclut donc : $R + r = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$.

3.2.2 - Dans cette configuration, $OM_A = 0$.
De plus par le théorème de Thalès, $OM_B = \dfrac{\gamma}{2}$ et $OM_C = \dfrac{\beta}{2}$.
Donc : $R + r = \dfrac{\beta + \gamma}{2}$ ce qui est bien l'écriture de l'équation (2).