BAC Tunisie 2020

Exercice 4

I.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x} > 0$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Elle y est également bien dérivable, comme inverse et composée de fonctions qui le sont sur les domaines considérés :
$\forall x \in \mathbb{R},\ 1+e^{2x} > 0$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1+e^{2x}} \neq 0$

On rappelle les formules usuelles : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2},\ \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}},\ \left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$

On trouve donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{1+e^{2x}} = -\dfrac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)\sqrt{1+e^{2x}}}$

2. a) En $+\infty$: $e^{2x} \to +\infty$, donc $\sqrt{1+e^{2x}} \to +\infty$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \to 0.$

En $-\infty$: $e^{2x} \to 0$, donc $\sqrt{1+e^{2x}} \to 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \to 1.$

b) D'après la question 1, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante entre ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
Ceci permet de conclure $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f(x) < 1.$

La courbe possède 2 asymptotes horizontales d'équations $y = 1$ et $y = 0$.

3. a)

	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
f'		$-$	
f	1	$\searrow$	0

b) f est strictement décroissante et réalise donc une bijection entre son domaine de définition et son image $J = \left]0;1\right[$.

c) Définissons la fonction g par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x$.
g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

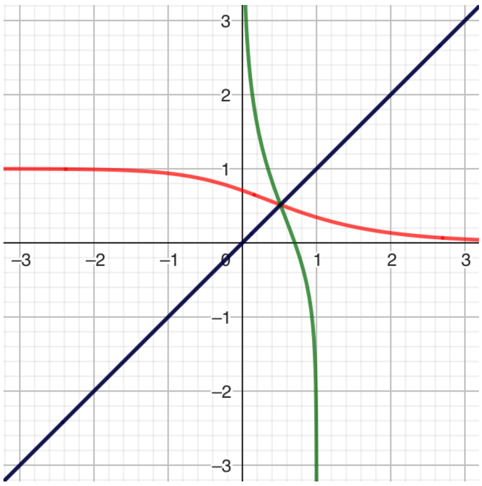
g est donc strictement décroissante et on a $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Elle possède bien un racine unique.
De plus, on vérifie $g(0{,}5) > 0$ et $g(0{,}6) < 0$.

On conclut donc que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α telle que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

d) Les éléments précédents nous permettent de donner :
$\forall x < \alpha,\ f(x) - x > 0$
$\forall x > \alpha,\ f(x) - x < 0$

Graphiquement, la courbe de f de situe au-dessus de la première bissectrice quand $x < \alpha$ puis passe en dessous.

4. Ci-dessous les 2 courbes demandées (ζ) en rouge et (ζ') en vert.



5. a) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = x - ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$

Compte tenu des éléments vus dans les questions précédentes, la fonction est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{1 + \sqrt{1 + e^{2x}}} = 1 - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)} = 1 - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{1+e^{2x}} + 1 + e^{2x} - e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)} = \frac{\sqrt{1+e^{2x}} + 1}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = f(x)$$

Et donc h est bien une primitive de f.

b) $A = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \left[h(x)\right]_0^{\alpha} = \left[h(x)\right]_0^{\alpha} = \alpha - ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{2\alpha}}\right) + ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Or par définition, $\sqrt{1 + e^{2\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha}$ et donc $1 + \sqrt{1 + e^{2\alpha}} = 1 + \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha}$

D'où $A = \alpha - ln\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha}\right) + ln\left(1 + \sqrt{2}\right) = \alpha + ln\left(\dfrac{\alpha\left(1+\sqrt{2}\right)}{\alpha + 1}\right)$

II.

1. a) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ F_k(x) = \displaystyle\int_0^x \left(f(t)\right)^k dt$

Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) > 0$, F_k est croissante. (2 façons de le « voir » : la dérivée est positive ou l'aire représentée augmente).

b) La première inégalité est évidente (un nombre positif à la puissance k reste positif) :
$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \left(f(t)\right)^k$.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{e^{2t}}} = e^{-t} \text{ et donc } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left(f(t)\right)^k \leqslant e^{-kt}$$

On conclut $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \left(f(t)\right)^k \leqslant e^{-kt}$.

c) Toutes les quantités étant positives, on peut intégrer l'inégalité précédente :
$\int_0^x 0dt = 0$ trivialement.

$\int_0^x \left(f(t)\right)^k dt = F_k(x)$ par définition.

$\int_0^x e^{-kt}dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-kt}\right]_0^x = \frac{1}{k}\left(1-e^{-kx}\right) \leqslant \frac{1}{k}$ car $0 < 1 - e^{-kx} < 1$.

Et finalement $\forall x \in \mathbb{R}_+\ 0 \leqslant F_k(x) \leqslant \frac{1}{k}$.

d) F_k est croissante et majorée donc converge vers une limite l_k en $+\infty$.
e) D'après la question c), $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant l_k \leqslant \frac{1}{k}$.
D'après le théorème des gendarmes, on a $\lim_{k\to+\infty} l_k = 0$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}_+\ F_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \left[h(t)\right]_0^x$

Calculons la limite de h en $+\infty$:

$$h(x) = x - ln\left(1+\sqrt{1+e^{2x}}\right) = ln\left(e^x\right) - ln\left(1+\sqrt{1+e^{2x}}\right) = ln\left(\frac{1+\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}\right)$$

Quand $x \to +\infty,\ 1+\sqrt{1+e^{2x}} \sim e^x$ et $\frac{1+\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x} \to 1$ et donc $h(x) \to 0$

On conclut $\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = -h(0)$.

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left(f(t)\right)^3 - f(t) = \frac{1}{\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)^3} - \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(\frac{1}{1+e^{2x}} - 1\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(\frac{1-1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = \frac{-e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1+e^{2x}\right)} = f'(x).$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \left(f(t)\right)^3 - f(t) = f'(x)$.

c) On n'insiste pas sur cette question qui consiste à intégrer l'égalité précédente :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0).$

d) $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$h(0) = -\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Finalement, on peut écrire $l_3 = \left(1+\sqrt{2}\right) - \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

3. a) Commençons comme dans la partie précédente, avec $k \geqslant 2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k-1}\left(\frac{1}{1+e^{2x}} - 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k-2} f'(x)$$

On va intégrer les 2 membres (là encore comme dans la question 2), puis procéder à une intégration par parties. (<u>*Remarque :*</u> *l'intégration par parties est souvent une bonne piste pour faire sortir des relations concernant des fonctions exponentielles, trigonométriques ou des relations de récurrence avec des fonctions puissance*).

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-2} f'(t)\,dt = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-2} \times \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right]_0^x - \int_0^x (2k-2)\frac{-e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}\left(1+e^{2t}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-3} \times \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}dt$$

$$= \left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1} - (2k-2)\int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-2} f'(t)\,dt$$

(*Désolé, la première ligne est écrit en petit, mais j'ai préféré garder le détail du calcul !*)
En reprenant la relation de départ, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1} - (2k-2)\left(F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x)\right)$$

Et on conclut : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall k \geqslant 2,\ F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \dfrac{1}{2k+1}\left[\left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1}\right]$

b) L'égalité demandée s'obtient directement en passant à la limite en utilisant les valeurs déjà considérées dans les questions précédentes :

$$l_{2k+1} - l_{2k-1} = \frac{-1}{(2k-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}},\ k \geqslant 2$$

c) On somme l'égalité précédente, toujours avec $k \geqslant 2$:

$$\sum_{m=2}^{k} l_{2m+1} - l_{2m-1} = \sum_{m=2}^{k} \frac{-1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$$

Attention : il y a une faute de frappe dans l'énoncé, la somme finit sur l_1 et non l_3.
En simplifiant le membre de gauche qui est une somme télescopique :

$$l_{2k+1} - l_1 = \sum_{m=2}^{k} \frac{-1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}.$$

Et finalement, on trouve la formule : $l_{2k+1} = l_1 - \displaystyle\sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$

d) On sait que $\lim\limits_{k \to +\infty} l_{2k+1} = 0$

En reprenant ce résultat dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\lim_{k \to +\infty} l_{2k+1} = l_1 - \lim_{k \to +\infty} \sum_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$$

Et donc : $\lim\limits_{k \to +\infty} \sum\limits_{m=2}^{k} \dfrac{1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}} = l_1$