BAC Tunisie 2020

Exercice 1

1. a) Si on décompose les opérations :
$r_1(A) = C$
$S_L(C) = B$
$r_2(B) = A$

Et donc $r_2 \circ S_L \circ r_1(A) = A$

On peut considérer S_L comme une rotation de centre L et d'angle π.
On sait que la composition de plusieurs rotations est une rotation ou une translation. Dans notre cas, la somme des angles de rotation est 2π, la composée est donc une translation.
Elle envoie A sur lui-même, c'est donc l'identité.

b) On sait que l'imagine de G par la composée de transformations est lui-même.
Or : $r_1(G) = G$ (centre de rotation) et $S_L(G) = F$ (par construction).

On en déduit que $r_2(F) = G$ et par définition de r_2 que GEF est isocèle rectangle en E

c) GEF étant isocèle, on a déjà $(EL) \perp (GL)$ (médiane = hauteur), autrement dit $(IL) \perp (JL)$.

De plus, par construction des points I et K comme milieu de $[EL]$ et $\left[EG\right]$ respectivement, on déduit (Théorème de Thalès) : $(IK)//(JL)$ et $IK = \dfrac{GL}{2} = JL$

On trouve la même disposition en considérant K et J ce qui donne $(IL)//(JK)$ et $IL = KJ$.

Comme on peut ajouter que GEF et GEL sont semblables, on a $EL = LG$.

Finalement, on a bien que $LJKI$ est un carré.

2. a) Par définition de la symétrique glissante, $\overrightarrow{LK}$ est directeur de Δ, qui passe par I.
Par construction de H (milieu de $[LF]$) et comme $LJKI$ est un carré, on a $(HI)//(LK)$.

Finalement, on a bien $\Delta = (IH)$

b) Si on décompose :
$S_{(LE)}(J) = H$ et $\varphi(H) = I$, donc $g(J) = I$
$S_{(LE)}(L) = L$ et $\varphi(L) = E$ (on considère L', image de L par symétrie d'axe Δ et on a bien $\overrightarrow{L'E} = \overrightarrow{LK}$), donc $g(L) = E$

c) Il faut montrer que K est invariant par g : $S_{(LE)}(K) = L'$ (point défini précédemment)
Puis on a bien que L' « revient » sur L par symétrie d'axe Δ, puis la translation ramène sur K.
Donc $g(K) = K$

En ajoutant à cela les 2 images de la question précédente, on a 3 points non alignés dont les images correspondent à la rotation de centre K et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On conclut que g est la rotation de centre K et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. a) Les antidéplacements dans le plan sont les symétries axiales et les symétries glissantes.
Or pour que f soit une symétrie axiale, il faudrait que (JI) et (LE) soient parallèles ou perpendiculaires.

Comme ça n'est pas le cas, f est une symétrie glissante.

b) f est composée de la symétrie par rapport à (JI) et de la translation de vecteur $\overrightarrow{JI}$.
Par cette transformation L devient K puis E.

4. La composée d'une symétrie glissée et d'une rotation est une symétrie glissée.
Si $M = L$, $M' = E$ et $M'' = E$
Et si $M = J$, $M' = I$ et $M'' = I$

On le vérifie également pour $M = E$: par construction des points, M' est telle que $\overrightarrow{KM'} = \overrightarrow{LK}$.
Et $\varphi(E) = M'$, donc par définition $M'' = S_{(LE)}(M')$.

Les points sont symétrique par rapport à (LE).

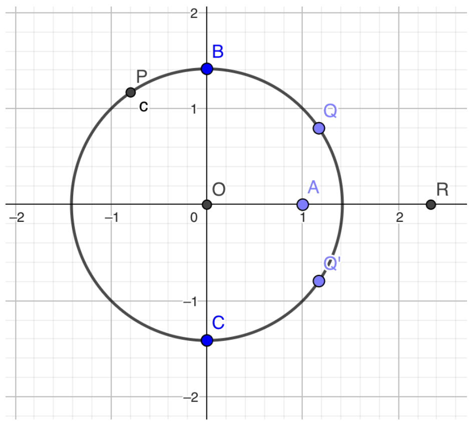
Exercice 2

1. a) on peut écrire $a = x + iy,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x^2 + y^2 = 2$.
On a donc $\overline{a} = x - iy$ et donc $R = a + \overline{a} = x + iy + x - iy = 2x$
Et on vérifie que $R \in \left(O, \overrightarrow{u}\right)$.

b) O et R sont sur l'axe des réels. Pour qu'ils soient alignés avec Q, il faut donc que Q soit également sur l'axe des réels, donc il faut $a \in \mathbb{R}$.

2. a) $ia = i\left(x + iy\right) = -y + ix$

En écriture trigonométrique, on a $a = re^{i\theta},\ r \in \mathbb{R}_+,\ \theta \in \left[0; 2\pi\right]$.
Et donc $ia = e^{i\frac{\pi}{2}}re^{i\theta} = re^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$
Ainsi la multiplication par i correspond à une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.



b) Si $A,\ P,\ M$ sont alignés, on a la relation sur leurs affixes : $\dfrac{ia - 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$

Or $\dfrac{ia - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{ia - 1}{z - 1} = \overline{\left(\dfrac{ia - 1}{z - 1}\right)}$

Et $\dfrac{ia-1}{z-1} = \dfrac{\overline{ia-1}}{\overline{z-1}} \Leftrightarrow (ia-1)(\overline{z}-1) = \left(\overline{ia}-1\right)(z-1)$

$\Leftrightarrow ia\overline{z} - ia - \overline{z} = \overline{ia}z - \overline{ia} - z$
$\Leftrightarrow \overline{z}\,(ia-1) + z\left(-\overline{ia}+1\right) = ia - \overline{ia}$

Or $\overline{ia} = \overline{-y+ix} = -y - ix = -i\overline{a}$

Donc $\overline{z}\,(ia-1) + z\left(-\overline{ia}+1\right) = ia - \overline{ia} \Leftrightarrow \overline{z}\,(ia-1) + z\,(i\overline{a}+1) = ia + i\overline{a} = i\,(a+\overline{a})$

Finalement, on trouve bien l'équivalence :
$A,\ P,\ M$ alignés $\Leftrightarrow \overline{z}\,(ia-1) + z\,(i\overline{a}+1) = i\,(a+\overline{a})$

c) Reprenons le même procédé, $(AP) \perp (OM) \Leftrightarrow \dfrac{ia-1}{z} \in i\mathbb{R}$
Et $\dfrac{ia-1}{z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{ia-1}{z} = -\dfrac{\overline{ia-1}}{\overline{z}}$
$\Leftrightarrow \overline{z}\,(ia-1) = -z\,(-i\overline{a}-1) \Leftrightarrow z\,(i\overline{a}+1) - \overline{z}\,(ia-1) = 0$

On conclut donc $(AP) \perp (OM) \Leftrightarrow z\,(i\overline{a}+1) - \overline{z}\,(ia-1) = 0$

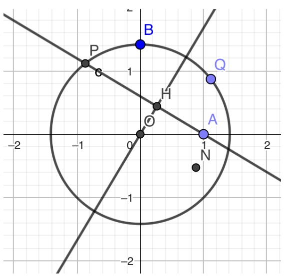
d) Par définition l'affixe de H doit vérifier les 2 équations des questions précédentes.
De la question précédente, on tire $Z_H\,(i\overline{a}+1) = \overline{Z_H}\,(ia-1)$.
En le réinjectant dans la relation de la question b), on trouve $2Z_H\,(i\overline{a}+1) = i\,(a+\overline{a})$

Ce qui donne $Z_H = \dfrac{i\,(a+\overline{a})}{2\,(i\overline{a}+1)}$

3. a) $Z_N = \dfrac{2}{i} Z_H = -2iZ_H$

N est l'image de H par la composée d'une homothétie de contre O et de rapport -2 et d'une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b)

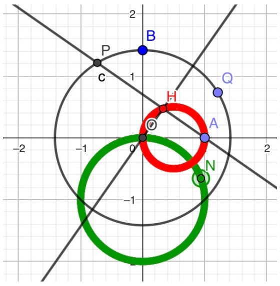


c) <u>*Remarque :*</u> *l'intuition nous oriente vers un mouvement circulaire… J'invite dans ces cas là à chercher des pistes sur la calculatrice ou Géogebra selon les circonstances dans lesquelles est réalisé l'exercice.*
Calculons
$\left|Z_H - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{i\,(a+\overline{a})}{2\,(i\overline{a}+1)} - \dfrac{1}{2}\right| = \left|\dfrac{i\,(a+\overline{a}) - i\overline{a} - 1}{2\,(i\overline{a}+1)}\right| = \left|\dfrac{ia-1}{2\,(i\overline{a}+1)}\right| = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{ia-1}{-\overline{ia}+1} = 1\right|.$

Donc H parcours le cercle de centre $\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Et d'après la question précédente N parcours le cercle de centre $-i$ et de rayon 1.

Ci-dessous la représentation graphique :



Exercice 3

<u>Remarque :</u> dans cet exercice, j'utilise la notation entre crochets pour les modulos. Il n'y a pas de raison particulière à part que c'est un réflexe. Cela ne change évidemment rien : $x \equiv y\ [z] \Leftrightarrow x \equiv y\ (mod\ z)$

1. a) par définition de $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = 2\times 5^n + 7$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}\ 2\times 5^n$ est pair, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}\, a_n$ et impair.

b) Regardons les 1ères puissances de 5 :
$5^0 = 1 \equiv 1\ [8]$
$5^1 = 5 \equiv 5\ [8]$
$5^2 = 25 = 4\times 8 + 1 \equiv 1\ [8]$
$5^3 = 20\times 8 + 5 \equiv 5\ [8]$

Suite à cette initialisation, nous allons montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 5^{2k} \equiv 1\ [8],\ 5^{2k+1} \equiv 5\ [8]$.

Supposons donc la propriété vraie au rang k et étudions le rang $k+1$.
$\exists m \in \mathbb{N},\ 5^{2k+1} = 8m + 5$, donc
$5^{2k+2} = 5\times(8m+5) = 8\times 5m + 25 = 8\times 5m + 8\times 4 + 1 \equiv 1\ [8]$
$5^{2k+3} = 5\left(8\left(5m+4\right)+1\right) = 8\times 5\times\left(5m+4\right) + 5 \equiv 5\ [8]$
Ce qui termine la démonstration.

On conclut donc $\forall n \in \mathbb{N}$:
Si n est pair, $5^n \equiv 1\ [8]$
Si n est impair, $5^n \equiv 5\ [8]$

c) Reprenons la disjonction de cas entre nombres pairs et impairs :
Pour $k \in \mathbb{N}$
Cas pair :
$\exists m \in \mathbb{N},\ 5^{2k} = 8m+1$ donc $a_{2k} = 2\times(8m+1)+7 = 16m+9 \equiv 1\ [8]$.
Cas impair :
$5^{2k+1} = 40m+5$ et $a_{2k+1} = 2\times(40m+5)+7 = 80m+17 \equiv 1[8]$.

Et on conclut bien que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \equiv 1[8]$

2. a) $\begin{cases} x \equiv 1\ [8] \\ x \equiv 7\ [125] \end{cases}$ admet bien des solutions car $8 \wedge 125 = 1$.

On peut traduire le système par $\exists \left(k, k'\right) \in \mathbb{N}^2,\ x = 8k + 1 = 125k' + 7$
D'où on extrait : $8k - 125k' = 6$

Or par le théorème de Bachet-Bezout : $\exists (u, v) \in \mathbb{N}^2,\ 8u + 125v = 1$

Utilisons l'algorithme d'Euclide :
$125 = 8 \times 15 + 5{,}8 = 5 + 3,\ 5 = 3 + 2,\ 3 = 2 + 1$

On « remonte » la chaîne :
$1 = 3 - 2 = 3 - \left(5 - 3\right) = -5 + 2 \times 3 = -5 + 2 \times \left(8 - 5\right) = 2 \times 8 - 3 \times 5$
$= 2 \times 8 - 3 \times \left(125 - 8 \times 15\right) = 47 \times 8 - 3 \times 125$ (*<u>Remarque :</u> on n'hésite surtout pas à vérifier avec la calculatrice qu'on n'a pas fait d'erreur de calcul. Spoiler : j'en avais fait une !*)

Notre identité de Bezout est donc : $47 \times 8 - 3 \times 125 = 1$
Ce qui nous donne : $282 \times 8 - 18 \times 125 = 6$

En réinventant dans les expressions de départ, on trouve une solution du système :
$x_0 = 8 \times 282 + 1 = 125 \times 18 + 7 = 2257$.

Les solutions génériques sont donc $x = x_0 + k\left(125 \times 8\right) = x_0 + 1000k,\ k \in \mathbb{N}$
D'après la valeur de x_0, $x = 2257 + 1000k = 257 + 1000\left(k + 2\right),\ k \in \mathbb{N}$.

On conclut que si $\begin{cases} x \equiv 1\ [8] \\ x \equiv 7\ [125] \end{cases}$ alors $x \equiv 257\ \left[1000\right]$

b) On a $5^3 = 125$, donc pour $n \geqslant 3,\ a_n = 2 \times 125 \times 5^{n-3} + 7 \equiv 7\ \left[125\right]$

D'après la question précédente, on trouve bien $\forall n \geqslant 3,\ a_n \equiv 257\ \left[1000\right]$.

c) D'après le résultat précédent, les 2 quantités considérés sont a_{2020} et a_{2021} et sont donc congru à 257 modulo 1000. Ce qui signifie que les 3 derniers chiffres de ces nombres est 257.

Finalement, les 3 derniers chiffres de $\left(2 \times 5^{2020} + 7\right)\left(2 \times 5^{2021} + 7\right)$ sont 049.

3. a) $\forall n \in \mathbb{N},\ 5a_{2n} - a_{2n+1} = 5 \times 2 \times 5^{2n} + 35 - 2 \times 5^{2n+1} - 7 = 28$

b) Soit $d = a_{2n} \wedge a_{2n+1}$.
Par définition de $\left(a_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = 2 \times 5^n + 7$

Pour que $d = 7$, il faudrait que $7 \mid 2 \times 5^n$, ce qui est impossible.

Ce qui nous permet de conclure que $d \neq 7$.

c) D'après l'identité de Bezout, $\exists \left(b, c\right) \in \mathbb{Z}^2, b \times a_{2n} + c \times a_{2n+1} = d$

Or, on a déjà : $\forall n \in \mathbb{N},\ 5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$
Donc d divise 28, ce qui nous indique que $d \in \{1; 2; 4; 7; 28\}$

Mais on sait que les a_n sont pairs et il reste donc $d = 1$.

Exercice 4

I.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x} > 0$, donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Elle y est également bien dérivable, comme inverse et composée de fonctions qui le sont sur les domaines considérés :
$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + e^{2x} > 0$
$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1+e^{2x}} \neq 0$

On rappelle les formules usuelles : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2},\ \left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}},\ \left(e^{2x}\right)' = 2e^{2x}$

On trouve donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{1+e^{2x}} = -\dfrac{e^{2x}}{\left(1+e^{2x}\right)\sqrt{1+e^{2x}}}$

2. a) En $+\infty$: $e^{2x} \to +\infty$, donc $\sqrt{1+e^{2x}} \to +\infty$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \to 0$.

En $-\infty$: $e^{2x} \to 0$, donc $\sqrt{1+e^{2x}} \to 1$ et $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} \to 1$.

b) D'après la question 1, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante entre ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
Ceci permet de conclure $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f(x) < 1$.

La courbe possède 2 asymptotes horizontales d'équations $y = 1$ et $y = 0$.

3. a)

	$-\infty$	$\mathbb{R}$	$+\infty$
f'		$-$	
f	1	$\searrow$	0

b) f est strictement décroissante et réalise donc une bijection entre son domaine de définition et son image $J = \left]0;1\right[$.

c) Définissons la fonction g par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x$.
g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

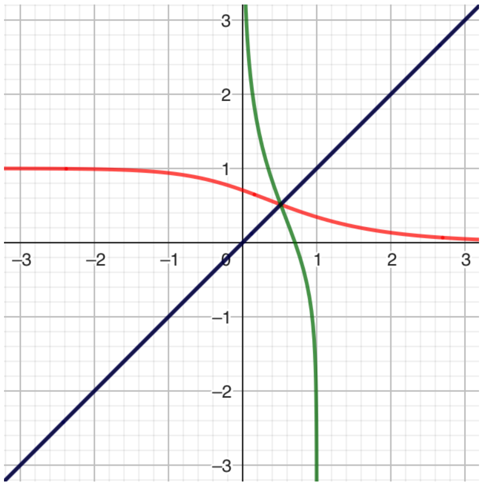
g est donc strictement décroissante et on a $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Elle possède bien un racine unique.
De plus, on vérifie $g(0{,}5) > 0$ et $g(0{,}6) < 0$.

On conclut donc que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α telle que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$.

d) Les éléments précédents nous permettent de donner :
$\forall x < \alpha,\ f(x) - x > 0$
$\forall x > \alpha,\ f(x) - x < 0$

Graphiquement, la courbe de f de situe au-dessus de la première bissectrice quand $x < \alpha$ puis passe en dessous.

4. Ci-dessous les 2 courbes demandées (ζ) en rouge et (ζ') en vert.



5. a) $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = x - ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$

Compte tenu des éléments vus dans les questions précédentes, la fonction est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{1 + \sqrt{1+e^{2x}}} = 1 - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)} = 1 - \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{1+e^{2x}} + 1 + e^{2x} - e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)} = \frac{\sqrt{1+e^{2x}} + 1}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1 + \sqrt{1+e^{2x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = f(x)$$

Et donc h est bien une primitive de f.

b) $A = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx = [h(x)]_0^{\alpha} = [h(x)]_0^{\alpha} = \alpha - ln\left(1 + \sqrt{1 + e^{2\alpha}}\right) + ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Or par définition, $\sqrt{1 + e^{2\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha}$ et donc $1 + \sqrt{1 + e^{2\alpha}} = 1 + \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\alpha + 1}{\alpha}$

D'où $A = \alpha - ln\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha}\right) + ln\left(1 + \sqrt{2}\right) = \alpha + ln\left(\dfrac{\alpha\left(1+\sqrt{2}\right)}{\alpha + 1}\right)$

II.

1. a) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+\ F_k(x) = \int_0^x (f(t))^k\,dt$

Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) > 0$, F_k est croissante. (2 façons de le « voir » : la dérivée est positive ou l'aire représentée augmente).

b) La première inégalité est évidente (un nombre positif à la puissance k reste positif) :
$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant (f(t))^k$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{e^{2t}}} = e^{-t}$ et donc $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ (f(t))^k \leqslant e^{-kt}$

On conclut $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant (f(t))^k \leqslant e^{-kt}$.

c) Toutes les quantités étant positives, on peut intégrer l'inégalité précédente :
$\displaystyle\int_0^x 0dt = 0$ trivialement.

$\displaystyle\int_0^x (f(t))^k\, dt = F_k(x)$ par définition.

$\displaystyle\int_0^x e^{-kt}dt = \left[-\frac{1}{k}e^{-kt}\right]_0^x = \frac{1}{k}\left(1-e^{-kx}\right) \leqslant \frac{1}{k}$ car $0 < 1 - e^{-kx} < 1$.

Et finalement $\forall x \in \mathbb{R}_+\ 0 \leqslant F_k(x) \leqslant \dfrac{1}{k}$.

d) F_k est croissante et majorée donc converge vers une limite l_k en $+\infty$.
e) D'après la question c), $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant l_k \leqslant \dfrac{1}{k}$.
D'après le théorème des gendarmes, on a $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} l_k = 0$.

2. a) $\forall x \in \mathbb{R}_+\ F_1(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = [h(t)]_0^x$

Calculons la limite de h en $+\infty$:
$$h(x) = x - ln\left(1+\sqrt{1+e^{2x}}\right) = ln\left(e^x\right) - ln\left(1+\sqrt{1+e^{2x}}\right) = ln\left(\frac{1+\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}\right)$$

Quand $x \to +\infty,\ 1+\sqrt{1+e^{2x}} \sim e^x$ et $\dfrac{1+\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x} \to 1$ et donc $h(x) \to 0$

On conclut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = -h(0)$.

b) $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ (f(t))^3 - f(t) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)^3} - \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(\dfrac{1}{1+e^{2x}} - 1\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\left(\frac{1-1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = \frac{-e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}\left(1+e^{2x}\right)} = f'(x).$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ (f(t))^3 - f(t) = f'(x)$.

c) On n'insiste pas sur cette question qui consiste à intégrer l'égalité précédente :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$.

d) $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$h(0) = -\,ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Finalement, on peut écrire $l_3 = \left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. a) Commençons comme dans la partie précédente, avec $k \geqslant 2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k-1}\left(\frac{1}{1+e^{2x}}-1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\right)^{2k-2} f'(x)$$

On va intégrer les 2 membres (là encore comme dans la question 2), puis procéder à une intégration par parties. (<u>*Remarque :*</u> *l'intégration par parties est souvent une bonne piste pour faire sortir des relations concernant des fonctions exponentielles, trigonométriques ou des relations de récurrence avec des fonctions puissance*).

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-2} f'(t)\,dt = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-2} \times \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right]_0^x - \int_0^x (2k-2)\frac{-e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}\left(1+e^{2t}\right)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-3} \times \frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}dt$$

$$= \left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1} - (2k-2)\int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}\right)^{2k-2} f'(t)\,dt$$

(*Désolé, la première ligne est écrit en petit, mais j'ai préféré garder le détail du calcul !*)

En reprenant la relation de départ, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1} - (2k-2)\left(F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x)\right)$$

Et on conclut : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall k \geqslant 2,\ F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k+1}\left[\left(f(x)\right)^{2k-1} - \left(f(0)\right)^{2k-1}\right]$

b) L'égalité demandée s'obtient directement en passant à la limite en utilisant les valeurs déjà considérées dans les questions précédentes :

$$l_{2k+1} - l_{2k-1} = \frac{-1}{(2k-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}},\ k \geqslant 2$$

c) On somme l'égalité précédente, toujours avec $k \geqslant 2$:

$$\sum_{m=2}^{k} l_{2m+1} - l_{2m-1} = \sum_{m=2}^{k} \frac{-1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$$

Attention : il y a une faute de frappe dans l'énoncé, la somme finit sur l_1 et non l_3.

En simplifiant le membre de gauche qui est une somme télescopique :

$$l_{2k+1} - l_1 = \sum_{m=2}^{k} \frac{-1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}.$$

Et finalement, on trouve la formule : $l_{2k+1} = l_1 - \sum\limits_{m=2}^{k} \frac{1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$

d) On sait que $\lim\limits_{k\to+\infty} l_{2k+1} = 0$

En reprenant ce résultat dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\lim_{k\to+\infty} l_{2k+1} = l_1 - \lim_{k\to+\infty}\sum_{m=2}^{k}\frac{1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}}$$

Et donc : $\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=2}^{k}\frac{1}{(2m-1)\left(\sqrt{2}\right)^{2m-1}} = l_1$