BAC 2022 Maroc

Exercice 1

A.1. Étudions la fonction f définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) = 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1}$.
Cette fonction est bien définie et dérivable, comme somme de fonctions dérivables sur l'intervalle considéré.

On trouve : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Dérivons une seconde fois pour pouvoir vérifier : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h''(x) = 2 - \dfrac{2x+2}{(x+1)^4} = 2\left(1 - \dfrac{1}{(x+1)^3}\right)$.

Or, sur $\mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{(x+1)^3} \leqslant 1$ et $h''(x) \geqslant 0$.

On conclut donc que f' est croissante avec $f'(0) = 0$, elle est donc positive.

Et de la même façon, f est croissante et $f(0) = 0$, on conclut donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1}$.

Pour la 2ème partie de la question, nous allons étudier la fonction
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ k(x) = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{x+1} = \left(x^2+1\right)(x-1) + \dfrac{1}{x+1}$.

Multiplions l'inégalité par $x + 1 > 0$ ce qui donne : $(x+1)\,k(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right) + 1$.

Finalement, le signe de g est donné par les variations de $j(x) = \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)$.
En dérivant (produit de fonctions dérivables), $j'(x) = 2x\left(x^2+1\right) + 2x\left(x^2-1\right) = 2x^3 \geqslant 0$
j est croissante avec un minimum de -1 en 0. On trouve donc que g est croissante et son minimum est $g(0) = 0$.

On arrive bien à la conclusion $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1} \leqslant x^3$.

2. En intégrant l'inégalité précédente (toutes les quantités sont positives), on arrive directement à :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x 1 - t + t^2 - \frac{1}{t+1}dt \leqslant \int_0^x t^3dt$ et donc :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - ln(1+x) \leqslant \dfrac{x^4}{4}$.

B.1.a. on approxime $ln(1+x)$ grâce à la question précédente. Quand $x \to 0,\ ln(1+x) \sim x - \dfrac{x^2}{2}$. On trouve donc $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} f(x) = \frac{1}{2}$ et f est continue à droite.

1.b. Calculons le taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{x - ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2x - 2ln(1+x) - x^2}{2x^3} \sim \frac{2x - 2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - x^2}{2x^3} = \frac{-1}{3}$$

$\lim\limits_{x \to 0_+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{-1}{3}$ et donc f est dérivable à droite.

1.c. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.
Graphiquement l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$.

2.a. f est dérivable par composition de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)x^2 - 2x\left(x - ln(1+x)\right)}{x^4} = \frac{x - \frac{x}{1+x} - 2x + 2ln(1+x)}{x^3} = \frac{-x - \frac{x}{1+x} + 2ln(1+x)}{x^3}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\dfrac{g(x)}{x^3}$ avec $g(x) = x + \dfrac{x}{1+x} - 2ln(1+x)$.

2.b.

$$\forall x \in I,\ g'(x) = 1 + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{2}{1+x} = \frac{(1+x)^2 + 1 - 2(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x + 2 - 2 - 2x}{(1+x)^2} = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

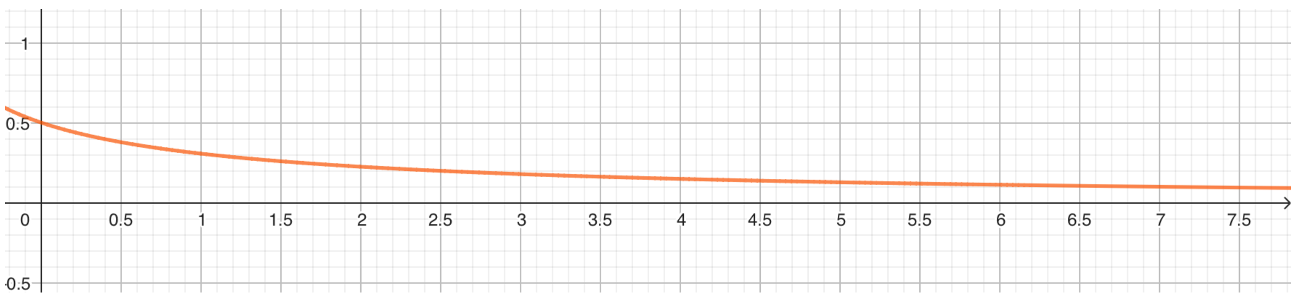
Comme division de carrés, $g'(x) \geqslant 0$.
En remarquant que $(1+x)^2 \geqslant 1$ sur I, on conclut $\forall x \in I,\ 0 \leqslant g'(x) \leqslant x^2$.

2.c. En intégrant comme dans la partie A, on arrive tout de suite au résultat voulu : $\forall x \in I,\ 0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{x^3}{3}$

2.d. g étant positive sur I, f' est négative et f est décroissante.

3.a. f est décroissante entre $\dfrac{1}{2}$ et 0.

3.b. (Attention, on remarque que Géogébra ne « prévient » pas que la fonction par défaut n'est pas définit en 0. Comme elle peut être prolongée, ce problème de définition ne se voit pas du tout sur le graphique !)



C.1. Considérons la fonction $x \mapsto f(x) - x$.
D'après les résultats précédents, la dérivée de cette fonction est négative et donc la fonction strictement décroissante.
Elle vaut $\dfrac{1}{2}$ en 0 et tend vers $-ln(2)$ en 1 et possède donc une unique racine.
Ainsi, $\exists!\ \alpha \in \left]0;1\right[,\ f(\alpha) = \alpha$.

2.a. $u_0 \in [0;1]$, $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 1 - ln(2)$.

Si pour n, $u_n \in [0;1]$, $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[1 - ln(2); \dfrac{1}{2}\right] \subset [0;1]$.

Ainsi l'héritage de la propriété est assuré et on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$.

2.b. $\left|\dfrac{u_{n+1}-\alpha}{u_n-\alpha}\right| = \left|\dfrac{f\left(u_n\right)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|$

D'après la question A.2.c., $\forall x \in I,\ 0 \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{x^3}{3}$ et donc $\forall x \in I,\ 0 \leqslant \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\ \ (x>0)$.

Ainsi, on conclut grâce au théorème des accroissements finis :
$\left|f\left(u_n\right)-\alpha\right| = \left|u_{n+1}-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\left|u_n-\alpha\right|$.

2.c. On peut écrire $\left|f\left(u_0\right)-\alpha\right| = \left|u_1-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\left|u_0-\alpha\right|$.
Supposons la propriété vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:
$\left|f\left(u_n\right)-\alpha\right| = \left|u_{n+1}-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\left|u_n-\alpha\right|$
Et par la propriété : $\left|u_n-\alpha\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
Donc $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\left|u_n-\alpha\right| \leqslant \dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.
Ainsi la propriété et bien héréditaire.

2.d. Soit $\epsilon > 0$.
$\left|u_n-\alpha\right| \leqslant \epsilon \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^N \leqslant \epsilon \Leftrightarrow N ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \leqslant ln(\epsilon) \Leftrightarrow N \geqslant \dfrac{ln(\epsilon)}{-ln(3)}$
(Attention à changer le sens des inégalités car les quantités considérés sont négatives !)

Donc, $\forall \epsilon > 0,\ \exists N\ n \geqslant N \Rightarrow \left|u_n-\alpha\right| \leqslant \epsilon$ et (u_n) converge vers α.

D.1. On utilise la définition de la dérivée et la relation de Chasles :
$$\frac{F\left(x+h\right)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x+h}^{1} f(t)\,dt - \int_{x}^{1} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt + \int_{x}^{1} f(t)\,dt - \int_{x}^{1} f(t)\,dt\right)$$
$$= \frac{1}{h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt.$$
Par continuité de f, on conclut que F est dérivable et $F'(x) = -f(x)$. *(Note : on pouvait probablement se contenter de la définition de l'intégrale vue en cours, on en profite pour redonner la démonstration)*

2.a. Comme proposé, utilisons une intégration par partie :
$$F(x) = \int_x^1 \frac{t-ln(1+t)}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\left(t-ln(1+t)\right)\right]_t^1 + \int_x^1 \frac{1}{t}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= ln2 - \frac{ln(1+x)}{x} + \left[ln(t)\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t(1+t)}dt = ln2 - \frac{ln(1+x)}{x} - ln(x) - \int_x^1 \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}dt$$

(On procède par décomposition en éléments simples pour la dernière étape)

$$F(x) = ln2 - \frac{ln(1+x)}{x} - ln(x) - \left[ln(t)\right]_x^1 + \left[ln(1+t)\right]_x^1 = ln2 - \frac{ln(1+x)}{x} - ln(x) + ln(x) + ln2 - ln(1+x)$$

Finalement $F(x) = 2ln2 - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)ln(1+x)$

2.b. On utilise une nouvelle fois le premier encadrement utilisé (au premier ordre) :

Quand $x \to 0_+$, $F(x) = 2ln2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) ln(1+x) \sim 2ln2 - x - 1.$
Ainsi $\lim_{x \to 0_+} F(x) = 2ln2 - 1.$

$\lim_{x \to 0_+} F(x) = \lim_{x \to 0_+} \int_x^1 f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt = 2ln2 - 1$ *(le passage à la limite est assuré par les propriétés de f démontrées précédemment).*

2.c. L'aire considérée est donnée par la valeur de l'intégrale calculée en 2.b.

E.1.a. On définit : $\forall k \in \mathbb{N},\ \Delta_k = f\left(k\right) - \int_k^{k+1} f(t)\, dt.$

Par décroissance de f on peut encadrer : $f\left(k\right) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leqslant f\left(k+1\right)$ et donc :
$\forall k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \Delta_k \leqslant f\left(k\right) - f\left(k+1\right).$

1.b. En repartant du résultat précédent :
$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\right) - f\left(k+1\right) = f(0) - f(n)$ *(somme téléscopique)*

Or $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(n) \leqslant f(0)$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant S_n \leqslant \frac{1}{2}.$

2.a. Par définition des S_n, on trouve immédiatement $S_{n+1} - S_n = \Delta_n \geqslant 0.$
Ainsi S_n est croissante.

2.b. D'après le théorème de la limite monotone (S_n) converge.

2.c. $\Delta_0 = f(0) - \int_0^1 f(t)\, dt = \frac{1}{2} - \left(2ln2 - 1\right) = \frac{3}{2} - 2ln2.$

Par croissance de (S_n), on peut donc améliorer l'encadrement précédent et donc celui de la limite :
$\frac{3}{2} - 2ln2 \leqslant l \leqslant \frac{1}{2}.$

Exercice 2

I.1. $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$
$1 + j + j^2 = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(j^2 + 1 + j\right)$
Comme $e^{i\frac{2\pi}{3}} \neq 0$, $1 + j + j^2 = 0.$

On peut aussi développer à partir de la forme algébrique de j :

$$1+j+j^2 = 1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-2i\frac{\sqrt{3}}{4}=0$$

2.a. $\left(E_m\right) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$
$\Delta = \left(mj^2\right)^2 - 4m^2j = m^2\left(j^4-4j\right) = m^2\left(-3j\right)$
Or $\left(1-j\right)^2 = 1+j^2-2j = 1+j^2+j-3j = -3j$

Et on peut donc écrire : $\Delta = \left[m\left(1-j\right)\right]^2$.

2.b. $z_1 = \dfrac{-mj^2+m\left(1-j\right)}{2} = \dfrac{m\left(1-j-j^2\right)}{2} = m$
$z_2 = \dfrac{-mj^2-m\left(1-j\right)}{2} = \dfrac{m\left(j-1-j^2\right)}{2} = jm$

3. $z_1+z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(1+j\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}}$
Donc : $\left(z_1+z_2\right)^{2022} = \left(\sqrt{2}\right)^{2022}e^{i\frac{1011\pi}{2}}e^{i674\pi}$
Or $e^{i674\pi}=1$, $\left(\sqrt{2}\right)^{2022} \in \mathbb{R}$ et $e^{i\frac{1011\pi}{2}} \in i\mathbb{R}$.
Et $\left(z_1+z_2\right)^{2022}$ est un imaginaire pur.

II.1. On peut écrire : $1+j = \dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Donc $z' = \left(1+j\right)z = e^{i\frac{\pi}{3}}z$.

En écrivant $z = re^{i\theta}$, on obtient $z' = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Ainsi, φ est une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

2.a. Pour trouver les images des points considérés, on va utiliser la propriété : $1+j+j^2=0$.

$a' = \left(1+j\right)m = -mj^2$
$b' = \left(1+j\right)mj = -mj^3 = -m$
$c' = \left(1+j\right)mj^2 = -mj^4 = -mj$

$p = \dfrac{b+a'}{2} = \dfrac{mj-mj^2}{2} = \dfrac{mj}{2}\left(1-j\right)$
$q = \dfrac{c+b'}{2} = \dfrac{mj^2-m}{2} = \dfrac{m}{2}\left(j^2-1\right)$
$r = \dfrac{a+c'}{2} = \dfrac{m-mj}{2} = \dfrac{m}{2}\left(1-j\right)$

$$p+qj+rj^2 = \frac{m}{2}j\left(1-j\right)+\frac{m}{2}j\left(j^2-1\right)+\frac{m}{2}j^2\left(1-j\right) = \frac{m}{2}j\left(1-j\right)\left(1-j-1+j\right)=0$$

2.c. Par caractérisation des triangles équilatéraux dans le plan complexe PQR est équilatéral.

Exercice 3

I.1.a. Si p est un diviseur de n, on peut écrire $n = kp,\ k \in \mathbb{N}$.

D'après l'énoncé, $(x+1)^n - x^n = ny = kpy \equiv 0\ [p]$.

Ainsi, $(x+1)^n \equiv x^n\ [p]$.

1.b. Si x est un multiple de p, $x = rp \equiv 0\ [p],\ r \in \mathbb{N}$.
Donc $x^n = r^n p^n \equiv 0\ [p]$.
On a par ailleurs $(x+1)^n = \left(rp+1\right)^n \equiv 1\ [p]$

Ce qui est contradictoire avec le résultat de la question précédente.
Et x est premier avec p.
De la même façon, $x+1$ est premier avec p.

1.c. En appliquant le petit théorème de Fermat, on peut écrire :
$(x+1)^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $x^{p-1} \equiv 1\ [p]$, d'où $(x+1)^{p-1} - x^{p-1} \equiv 0\ [p]$

On conclut : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1}\ [p]$.

2. Si n est pair, $p = 2$ et la question précédente signifie alors : $x+1 \equiv x\ [2]$, c'est qui est impossible !
Donc si n est pair, $\left(E_n\right)$ n'a pas de solution.

3.a. Si p est le plus petit diviseur premier de n, $p-1$ ne peut pas diviser n. Et comme il est plus petit que p, il est forcément premier avec n.
On peut appliquer le théorème de Bezout et donc $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ nu + \left(p-1\right)v = 1$.

3.b. $u = q\left(p-1\right) + r$.
On remplace dans l'égalité précédente : $n\left(q\left(p-1\right)+r\right) + \left(p-1\right)v = 1$.
On obtient comme demandé : $nr = 1 - \left(p-1\right)\left(nq+v\right)$

3.c. Par définition des éléments, $nr > 2$ (on justifie rapidement que $r \neq 0$, sinon $p-1$ divise nu et donc 1 ce qui est absurde car $p > 2$ par hypothèse) et $p - 1 \geqslant 2$.
Il faut donc $nq + v < 0$ et $v' = -\left(nq+v\right) > 0$.

3.d. Repartons de la question 1 : $(x+1)^n \equiv x^n\ [p] \Rightarrow (x+1)^{nr} \equiv x^{nr}\ [p]$
Or, $nr = 1 + \left(p-1\right)v'$, ce qui donne : $(x+1)^{1+(p-1)v'} \equiv x^{1+(p-1)v'}\ [p]$
Qu'on réécrit : $(x+1)\left[(x+1)^{p-1}\right]^{v'} \equiv x\left[x^{(p-1)}\right]^{v'}\ [p]$ et avec le résultat de la question 1.c :
$(x+1)\,1^{v'} \equiv x1^{v'}\ [p]$
On arrive à nouveau sur $x+1 \equiv x\ [p]$, ce qui est absurde.
Et on conclut qu'il n'y a pas de solution dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4

I.1.a. $E \subset M_2(\mathbb{R})$ et $0_{M_2(\mathbb{R})} = M(0,0) \in E$
Il faut vérifier que E est stable par combinaison linéaire.
Soit $\left(a,b,c,d,\lambda,\mu\right) \in \mathbb{Z}^6$.

$$\lambda M(a,b) + \mu M(c,d) = \begin{pmatrix} \lambda a & 3\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu c & 3\mu d \\ \mu d & \mu c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu c & 3(\lambda b + \mu d) \\ \lambda b + \mu d & \lambda a + \mu c \end{pmatrix} = M(\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d) \in E$$

1.b.

$$M(a,b) \times M(c,d) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3ad + 3bc \\ bc + ad & 3bd + ac \end{pmatrix} = M(ac + 3bd, bc + ad)$$

1.c. Le résultat précédent nous assure de la commutativité de la multiplication dans E car le résultat est symétrique par rapport aux 2 matrices.
On note également que $I = M(1,0) \in E$.
E est donc un sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$ commutatif et unitaire.

2. $\varphi\Big(M(a,b) \times M(c,d)\Big) = \varphi\Big(M(ac+3bd, bc+ad)\Big) = \left|(ac+3bd)^2 - 3(bc+ad)^2\right|$
$= \left|a^2c^2 + 9b^2d^2 + 6abcd - 3b^2c^2 - 3a^2d^2 - 6abcd\right| = \left|a^2c^2 + 9b^2d^2 - 3b^2c^2 - 3a^2d^2\right|$

$\varphi\Big(M(a,b)\Big) \times \varphi\Big(M(c,d)\Big) = \left|a^2 - 3b^2\right| \left|c^2 - 3d^2\right| = \left|a^2c^2 + 9b^2d^2 - 3b^2c^2 - 3a^2d^2\right|$

Et $\varphi\Big(M(a,b) \times M(c,d)\Big) = \varphi\Big(M(a,b)\Big) \times \varphi\Big(M(c,d)\Big)$, donc φ est un homomorphisme entre les 2 groupes.

3.a. $M(a,b) \times M(a,-b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -3b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 3b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - 3b^2 \end{pmatrix} = (a^2 - 3b^2)\, I.$

3.b. Si $M(a,b)$ est inversible dans $(E, \times)$.
Donc $det\left(M(a,b) \times \left(M(a,b)\right)^{-1}\right) = det\Big(M(a,b)\Big) \times det\left(\left(M(a,b)\right)^{-1}\right) = det(I) = 1$
Les 2 déterminants étant à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ils valent 1 ou -1.
Comme $det\Big(M(a,b)\Big) = a^2 - 3b^2$, on conclut bien que $\varphi\Big(M(a,b)\Big) = 1$.

3.c. $\varphi\Big(M(a,b)\Big) = 1$.
D'après la question 3.a. $M(a,b)$ est inversible et son inverse est $M(a,-b)$

4.a. $\varphi\Big(M(a,b)\Big) = 0 \Leftrightarrow \left|a^2 - 3b^2\right| = 0$.
a et b doivent donc vérifier : $a^2 = 3b^2$ ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{Z}$ sauf pour $a = b = 0$.

4.b. $M(a,b) \times M(c,d) = 0 \Rightarrow \varphi\Big(M(a,b) \times M(c,d)\Big) = \varphi\Big(M(a,b)\Big) \times \varphi\Big(M(c,d)\Big) = 0$
Or $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre donc $\varphi\Big(M(a,b)\Big) = 0$ ou $\varphi\Big(M(c,d)\Big) = 0$.
D'après la question précédente ceci implique $M(a,b) = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ ou $M(c,d) = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et démontre donc que E est un anneau intègre.

4.c. E n'est pas un corps car certains éléments ne sont pas inversibles.